

Радиолокация и радионавигация

УДК 621.396.96

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2021-24-1-22-33>

Универсальный алгоритм автофокусировки радиолокационных изображений

А. А. Монаков✉

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), Санкт-Петербург, Россия

✉ a_monakov@mail.ru

Аннотация

Введение. Случайные перемещения фазового центра антенны радиолокатора с синтезированной апертурой (РСА) являются источником фазовых ошибок (ФО) траекторного сигнала, которые приводят к расфокусировке радиолокационного изображения (РЛИ). Для получения качественного РЛИ используются различные алгоритмы автофокусировки. Среди существующих алгоритмов автофокусировки можно выделить группу алгоритмов, которые позволяют оценить ФО посредством нахождения экстремума некоторой функции качества (ФК) РЛИ. Известными вариантами ФК являются, например, энтропия и резкость РЛИ. Для решения задачи поиска экстремума ФК необходимо применять быстрые методы, известные из теории оптимизации, реализация которых средствами бортового вычислителя является сложной задачей.

Цель работы. Синтезировать универсальный и простой в плане вычислений алгоритм автофокусировки, который позволяет применять широкий спектр видов ФК РЛИ без изменения своей структуры.

Материалы и методы. Для решения поставленной задачи предложен алгоритм, основанный на замене выбранной целевой ФК РЛИ на более простую при вычислениях суррогатную ФК, найти экстремум которой можно прямым способом. Данный метод получил в научной литературе название ММ-метода оптимизации. В качестве суррогатной ФК предлагается использовать квадратическую функцию.

Результаты. Синтезированный алгоритм является прямым и не предполагает использование рекурсивных методов поиска оптимального решения, что ускоряет его работу и повышает устойчивость. Алгоритм легко перестраивается под выбранную целевую функцию качества РЛИ. По сравнению с алгоритмом, использующим линейную суррогатную ФК, предлагаемый алгоритм дал среднеквадратическую ошибку (СКО) остаточной ФО, примерно в 1.5 раза меньшую при меньшем на 10 % количестве итераций.

Заключение. Предложенный алгоритм автофокусировки может быть использован в РСА для компенсации ФО. Алгоритм основан на ММ-методе оптимизации квадратичных суррогатных функций качества РЛИ. Результаты математического моделирования подтверждают работоспособность рассмотренного алгоритма при больших значениях фазовых ошибок.

Ключевые слова: радиолокатор с синтезированной апертурой, фазовые ошибки, алгоритм автофокусировки, целевая функция качества, суррогатная функция качества, ММ-метод оптимизации

Для цитирования: Монаков А. А. Универсальный алгоритм автофокусировки радиолокационных изображений // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2021. Т. 24, № 1. С. 22–33. doi: 10.32603/1993-8985-2021-24-1-22-33

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 03.11.2020; принята к публикации после рецензирования 27.12.2020; опубликована онлайн 25.02.2021



A Versatile Algorithm for Autofocusing SAR Images

Andrey A. Monakov ✉

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI),
St Petersburg, Russia

✉ a_monakov@mail.ru

Abstract

Introduction. Random deviations of the antenna phase centre of a synthetic aperture radar (SAR) are a source of phase errors for the received signal. These phase errors frequently cause blurring of the radar image. The image quality can be improved using various autofocus algorithms. Such algorithms estimate phase errors via optimization of an objective function, which defines the radar image quality. The image entropy and sharpness are well known examples of objective functions. The objective function extremum can be found by fast optimization methods, whose realization is a challenging computing task.

Aim. To synthesize a versatile and computationally simple autofocus algorithm allowing any objective function to be used without changing its structure significantly.

Materials and methods. An algorithm based on substituting the selected objective function with a simpler surrogate objective function, whose extremum can be found by a direct method, is proposed. This method has been referred as the MM optimization in scientific literature. It is proposed to use a quadratic function as a surrogate objective function.

Results. The synthesized algorithm is straightforward, not requiring recursive methods for finding the optimal solution. These advantages determine the enhanced speed and stability of the proposed algorithm. Adjusting the algorithm for the selected objective function requires minimal software changes. Compared to the algorithm using a linear surrogate objective function, the proposed algorithm provides a 1.5 times decrease in the standard deviation of the phase error estimate, with an approximately 10 % decrease in the number of iterations.

Conclusion. The proposed autofocus algorithm can be used in synthetic aperture radars to compensate the arising phase errors. The algorithm is based on the MM-optimization of the quadratic surrogate objective functions for radar images. The computer simulation results confirm the efficiency of the proposed algorithm even in case of large phase errors.

Keywords: synthetic aperture radar, phase errors, autofocus algorithm, objective function, surrogate objective function, MM optimization

For citation: Monakov A. A. A Versatile Algorithm for Autofocusing SAR Images. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2021, vol. 24, no. 1, pp. 22–33. doi: 10.32603/1993-8985-2021-24-1-22-33

Conflict of interest. The author declares the absence of any conflicts of interest.

Submitted 03.11.2020; accepted 27.12.2020; published online 25.02.2021

Введение. Автофокусировка (АФ) радиолокационных изображений (РЛИ) является важным элементом обработки сигналов в радиолокаторах с синтезированной апертурой антенны (РСА), поскольку позволяет компенсировать фазовые ошибки (ФО) траекторного сигнала. ФО могут быть вызваны траекторными нестабильностями (ТН) носителя, которые приводят к случайным перемещениям фазового центра антенны бортового радиолокатора, или изменениями оптической длины пути, проходимого сигналом в неоднородном канале распространения.

В настоящее время предложено большое количество алгоритмов автофокусировки [1]. Среди них можно выделить группу, в основе которых лежит компенсация ФО посредством оптимизации некоторой функции качества РЛИ. К таким алгоритмам относятся алгоритмы минимизации энтропии РЛИ [2–4], максимизации контраста РЛИ [5–7] или резкости РЛИ [8–14]. Достоинством этих алгоритмов является целенаправленное оценивание ФО посредством поиска экстремума соответствующей функции качества. Для организации поиска использу-

ются известные алгоритмы теории оптимизации. Недостатком перечисленных алгоритмов является их сложность, которая при ограниченных вычислительных ресурсах значительно увеличивает время нахождения решения.

В некоторых случаях удастся синтезировать прямые алгоритмы, которые позволяют найти решение, минуя стадию поиска. Так в [12, 13] были предложены непараметрические алгоритмы, позволяющие оценить ФО без поиска решения в многомерном векторном пространстве. Это оказалось возможным благодаря тому, что в качестве целевой функции использовалась сравнительно простая функция качества (ФК) – резкость РЛИ. Однако, как показано в [14], данная функция не является наилучшей для эффективного решения задачи АФ, и близким к оптимальной ФК является логарифмическая функция. Однако для этой ФК предложенные в [12, 13] подходы не применимы, поэтому чрезвычайно интересным представляется использование ММ-методов теории оптимизации [15, 16]. Название этой категории методов поиска экстремума ФК происходит от сокращения английских терминов "Majorize – Minimize" для задач минимизации ФК или "Minorize – Maximize" для задач максимизации ФК. ММ-методы состоят в оптимизации суррогатных функций качества (СФК), которые представляют собой простые в вычислительном смысле функции и являются мажорантами (задачи минимизации) или минорантами (задачи максимизации) выбранной целевой ФК. Как доказано в [15–17], ММ-методы позволяют покоординатным поиском эффективно найти истинное решение оптимизационной задачи. Впервые для решения задачи АФ метод оптимизации суррогатных функций качества был предложен в [18]. Суть представленного в [18] алгоритма заключается в замене энтропийной ФК линейной функцией, поверхность которой является касательной плоскостью к ФК в точке, соответствующей решению на предыдущем шаге поиска.

В настоящей статье алгоритм, предложенный в [18], обобщен на квадратические СФК. Задача построения квадратических СФК была рассмотрена в [17], но, к сожалению, найденное в этой работе решение не может быть использовано в целях АФ. Синтезированный в настоящей статье алгоритм допускает прямое решение и не требует применения методов поиска теории оптимизации. Алгоритм позволяет осуществить АФ при любой

дважды непрерывно дифференцируемой ФК. Математическое моделирование показало, что предлагаемый алгоритм дает высокое качество РЛИ даже при больших ФО и по ряду параметров превосходит алгоритм, предложенный в [18].

Математическая модель фазовых ошибок РСА. Пусть невозмущенное движение носителя на интервале синтезирования $[0, T]$ должно происходить вдоль единичного вектора $\hat{\mathbf{v}}$, в качестве которого можно принять

$$\hat{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} / \|\bar{\mathbf{V}}\|,$$

где $\bar{\mathbf{V}}$ – среднее значение вектора мгновенной скорости носителя $\mathbf{V}(t)$:

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{V}(t) dt;$$

$\|\cdot\|$ – норма вектора. При этом радиус-вектор положения фазового центра антенны РСА в пространстве

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \hat{\mathbf{v}}vt + \delta\mathbf{r}(t),$$

где $v = \|\bar{\mathbf{V}}\|$ – средняя скорость носителя; $\delta\mathbf{r}(t)$ – вектор ТН (рис. 1).

Если светящаяся точка M на поверхности имеет радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$, то расстояние между фазовым центром антенны РСА и точкой в момент времени t

$$R(t) = \|\mathbf{r}(t) - \boldsymbol{\rho}\| = \|\mathbf{r}(0) + \hat{\mathbf{v}}vt + \delta\mathbf{r}(t) - \boldsymbol{\rho}\|, \quad (1)$$

$$t \in [0, T].$$

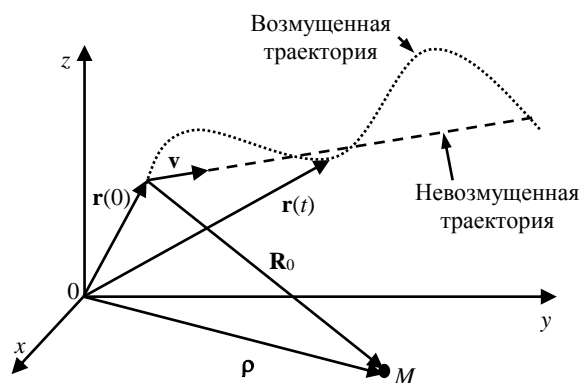


Рис. 1. Геометрия движения РСА
 Fig. 1. Geometry of the SAR movement

При этом принимаемый от точки сигнал равен

$$ss(\tau, t) = a\left(\tau - \frac{2R(t)}{c}\right) \exp[-ik_0 R(t)], \quad (2)$$

где τ – "быстрое" время; t – "медленное" время; $a(\tau)$ – комплексная огибающая излучаемого сигнала; c – скорость света; $k_0 = 2\omega_0/c$ – волновое число; ω_0 – круговая несущая частота. Здесь и далее при преобразованиях сигнального массива будем придерживаться обозначений, впервые введенных в [19]. В этих обозначениях первая литера соответствует "быстрому" времени или дальномерной частоте, вторая – "медленному" времени или азимутальной частоте, строчные литеры – сигналу по соответствующему времени, заглавные – спектру по соответствующей частоте.

Преобразование Фурье сигнала (2) по "быстрому" времени

$$Ss(\omega, t) = A(\omega) \exp[-i(k_0 + k)R(t)],$$

где $A(\omega)$ – спектр комплексной огибающей излучаемого сигнала; ω – дальномерная частота; $k = 2\omega/c$ – дальномерное волновое число.

Пусть $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}(0) - \mathbf{p}$, тогда (1) можно переписать в виде

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + v^2 t^2 + \delta r^2(t) + 2(\mathbf{R}_0, \hat{\mathbf{v}})vt + 2(\mathbf{R}_0, \delta \mathbf{r}(t)) + 2(\delta \mathbf{r}(t), \hat{\mathbf{v}})vt},$$

где $R_0 = \|\mathbf{R}_0\|$; $\delta r(t) = \|\delta \mathbf{r}(t)\|$; (\cdot, \cdot) – скалярное произведение векторов. Вынося из-под квадратного корня R_0 и считая, что $vT, \delta r(t) \ll R_0$, получим следующее разложение:

$$R(t) \approx R_0 + \frac{v^2 t^2}{2R_0} + \frac{\delta r^2}{2R_0} + (\hat{\mathbf{R}}_0, \delta \mathbf{r}(t)) + \frac{vt}{R_0}(\hat{\mathbf{v}}, \delta \mathbf{r}(t)) + (\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{v}})vt, \quad (3)$$

где $\hat{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{R}_0 / \|\mathbf{R}_0\|$ – орт в направлении вектора \mathbf{R}_0 .

Проанализируем слагаемые в разложении (3). Член R_0 не зависит от времени, и ему соответствует постоянный фазовый сдвиг, наличие которого никак не сказывается на качестве РЛИ.

Член $\frac{v^2 t^2}{2R_0}$ называется квадратическим, и его присутствие приводит к расфокусировке РЛИ.

Члены $\frac{\delta r^2}{2R_0}, (\hat{\mathbf{R}}_0, \delta \mathbf{r}(t)), \frac{vt}{R_0}(\hat{\mathbf{v}}, \delta \mathbf{r}(t))$ зависят от ТН, и их присутствие также ведет к расфокусировке РЛИ. Последнее слагаемое $(\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{v}})vt$ определяет доплеровскую частоту сигнала от точки M . Таким образом, из перечисленных слагаемых только последнее является полезным. Другие члены необходимо компенсировать для получения качественного РЛИ.

Эта компенсация осуществляется следующим образом:

– двухмерный сигнальный массив $ss(\tau, t)$ подвергается быстрому прямому преобразованию Фурье по "быстрому" времени τ ; в результате получается массив $Ss(\omega, t)$;

– множество строк двумерного массива $Ss(\omega, t)$ разбивается на L полос (подмножеств) по M строк в каждой, и строки каждой полосы умножаются на компенсирующий фазор

$$P_l(t) = \exp\left\{i(k_0 + k)\left[\frac{v^2 t^2}{2R_{0l}} + \frac{\delta r^2(t)}{2R_{0l}} + (\hat{\mathbf{R}}_{0l}, \delta \mathbf{r}(t)) + \frac{vt}{R_{0l}}(\hat{\mathbf{v}}, \delta \mathbf{r}(t))\right]\right\},$$

$l = 1, \dots, L,$

где R_{0l} – наклонная дальность до l -й полосы;

– полученный двухмерный массив подвергается быстрому обратному преобразованию Фурье по дальномерной частоте ω .

В итоге получается двухмерный сигнальный массив

$$ss(\tau, t) = a\left[\tau - \frac{2R(t)}{c}\right] \exp[-ik_0 R(t)], \quad (4)$$

в котором произведена компенсация ТН по данным навигационного комплекса.

Отметим, что в (4)

$R(t) \approx R_0 + (\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{v}})vt + \Delta R(t) = R_0 + vt \sin \alpha_0 + \Delta R(t)$, где $\Delta R(t)$ – некомпенсированные остатки ТН.

Изложенная методика компенсации ТН по навигационным данным не ликвидирует миграций светящихся точек по дальности [19–21]. Компенсация миграций – следующая задача, решение которой является важным этапом улучшения качества РЛИ. В статье этот этап не рассматривается. Однако в результате применения алгоритмов компенсации миграции светящихся точек по дальности получается следующий двухмерный сигнал:

$$ss(\tau, t) = ss_0(\tau, t) \exp[i\varphi(t)], \quad (5)$$

$$\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]; t \in [0, T],$$

где $ss_0(\tau, t) = a \left(\tau - \frac{2R_0}{c} \right) \exp[-ik_0 vt \sin \alpha_0]$ – сигнал РСА при невозмущенном движении носителя; $\varphi(t) = k_0 \Delta R(t)$ – фазовая ошибка; α_0 – угол, под которым точка M видна с борта носителя в начале интервала синтезирования; $\sin \alpha_0 = (\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{v}})$.

Таким образом, задача АФ – компенсация фазовой ошибки $\varphi(t)$, которая в первом приближении постоянна в пределах интервала "быстрого" времени $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$.

Автофокусировка методом ММ-оптимизации. Пусть качество РЛИ

$$I(m, q) = \frac{|sS(m, q)|^2}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} |sS(m, q)|^2},$$

где M и N – количество пикселей по продольной ("быстрое" время) и поперечной ("медленное" время) дальностям соответственно;

$$sS(m, q) = \sum_{n=0}^{N-1} ss(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} qn\right], \quad (6)$$

$$0 \leq q \leq N-1.$$

Преобразование Фурье (ПФ) сигнала (6) по "медленному" времени можно охарактеризовать ФК

$$F(\varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} f[I(m, q)],$$

где $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ – вектор отсчетов ФО; $f(x)$ – локальная ФК, определяющая вклад пикселя $I(m, q)$ в качество РЛИ. Будем считать, что функция $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ является выпуклой, т. е. для любых $x, y \in [0, 1]$ и для любого $t \in [0, 1]$ выполняется

$$f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

При этом алгоритм АФ состоит в поиске оценки вектора ФО:

$$\hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} F(\varphi). \quad (7)$$

Если выбранная ФК $f(x)$ является вогнутой и следует решить задачу максимизации, все результаты статьи остаются справедливыми при замене локальной ФК на $-f(x)$.

Для решения задачи (7) принципиально возможный способ – поиск оценки $\hat{\varphi}$ методами теории оптимизации [22]. Однако ФК является сложной, и применение методов оптимального поиска сопряжено со значительными вычислительными затратами, которые неприемлемы для вычислителя РСА. В связи с этим очень привлекательно использование ММ-методов оптимизации.

ММ-метод, или метод оптимизации суррогатных функций качества (СФК), состоит в замене сложной с точки зрения необходимых вычислений задачи (7) на последовательность более простых задач, которые можно решить прямым способом [15–17]. Это достигается построением последовательности суррогатных функций $G(\varphi; \hat{\varphi}_p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, которые являются мажорантами ФК $F(\varphi)$ на каждом шаге поиска:

$$F(\varphi) \leq G(\varphi; \hat{\varphi}_p),$$

где $\hat{\varphi}_p$ – оценка ФО на p -м шаге.

Если СФК удовлетворяет следующим требованиям [15–17]:

- 1) $F(\varphi) \leq G(\varphi; \hat{\varphi}_p)$ при любом φ ;
- 2) $F(\hat{\varphi}_p) = G(\hat{\varphi}_p; \hat{\varphi}_p)$;
- 3) $\text{grad} F(\varphi) = \text{grad} G(\varphi; \hat{\varphi}_p)$ при $\varphi = \hat{\varphi}_p$,

то последовательность векторов оценок $\hat{\varphi}_p$ при $p \rightarrow \infty$ сходится к минимуму ФК $F(\varphi)$.

Действительно, пусть на p -м шаге получена оценка $\hat{\phi}_p$. Тогда для $(p + 1)$ -го шага будет справедлива следующая цепочка неравенств:

$$F(\hat{\phi}_{p+1}) \leq G(\hat{\phi}_{p+1}; \hat{\phi}_p) = G(\hat{\phi}_{p+1}; \hat{\phi}_p) - G(\hat{\phi}_p; \hat{\phi}_p) + F(\hat{\phi}_p) \leq F(\hat{\phi}_p), \quad (8)$$

где было учтено, что вследствие проведенной на $(p + 1)$ -м шаге минимизации $G(\hat{\phi}_{p+1}; \hat{\phi}_p) \leq G(\hat{\phi}_p; \hat{\phi}_p)$, и в силу условия 2 $G(\hat{\phi}_p; \hat{\phi}_p) = F(\hat{\phi}_p)$.

Таким образом, с каждым шагом алгоритма поиска приближаемся к минимуму ФК. Более того, как отмечено в [15, 16], неравенство (8) свидетельствует о высокой стабильности ММ-алгоритма.

Автофокусировка методом оптимизации квадратических суррогатных функций. Построим квадратическую СФК

$$g(x; x_0) = a(x_0)x^2 + 2b(x_0)x + c(x_0), \quad (9)$$

$$x, x_0 \in [0, 1],$$

удовлетворяющую перечисленным ранее требованиям. Для этого необходимо, чтобы были выполнены условия:

$$\begin{cases} c = y_0 - 2bx_0 - ax_0^2, \\ b = 0.5y_1 - ax_0, \\ ax^2 + 2bx + c \geq f(x), 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

где x_0 – пиксель РЛИ после оптимизации на текущем шаге поиска оценки ФО; y_0, y_1 – значения локальной ФК и ее первой производной в точке x_0 . Первые 2 уравнения системы (10) позволяют определить значения коэффициентов b и c :

$$\begin{cases} b = 0.5y_1 - ax_0, \\ c = y_0 - y_1x_0 - ax_0^2. \end{cases} \quad (11)$$

Подставив эти выражения в (9), получим

$$g(x; x_0) = a(x - x_0)^2 + y_1(x - x_0) + y_0, \quad (12)$$

$$x, x_0 \in [0, 1].$$

Допустим, что локальная ФК $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда для нее справедливо следующее разложение в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + 0.5f''(\xi)(x - x_0)^2 = y_0 + y_1(x - x_0) + 0.5f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

где $f''(\xi)$ – значение второй производной ФК в некоторой точке $\xi \in [0, 1]$. Следовательно, на основании (12) функция $g(x; x_0)$ будет мажорантой локальной ФК, если

$$a \geq 0.5 \max_{x \in [0, 1]} f''(x). \quad (13)$$

Теперь можно приступить к решению задачи оценки ФО методом оптимизации СФК. Эта задача, как показано далее, имеет конечное аналитическое решение и не требует применения методов численного поиска экстремума СФК.

На основании (5) при наличии ФО сигнальный массив $ss(\tau, t)$ может быть записан в дискретном времени в виде:

$$ss(m, n) = ss_0(m, n) \exp[i\varphi(n)],$$

$$m = 0, \dots, M - 1; \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Тогда для преобразования Фурье по "медленному" времени получим следующее уравнение:

$$sS(m, q) = \sum_{n=0}^{N-1} z_n ss(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} qn\right], \quad (14)$$

$$q = 0, \dots, N - 1$$

где $z_n = \exp[-i\varphi(n)]$, $n = 0, \dots, N - 1$ – фазоры, компенсирующие ФО.

Будем считать, что находимся на p -м шаге алгоритма АФ, когда фазоры $z_k = \exp[-i\varphi(k)]$, $k = 1, \dots, p - 1$ были найдены и ФО компенсированы, и требуется найти следующий p -й, который обозначим $z = z_p = \exp[-i\varphi(p)]$.

Перепишем (14) в следующем виде:

$$sS(m, q) = P_m(q, p) + zQ_m(q, p),$$

где

$$P_m(q, p) = \sum_{n=0}^{p-1} z_n s s(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} qn\right] + \sum_{n=p}^{N-1} s s(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} qn\right];$$

$$Q_m(q, p) = s s(m, p) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} qp\right].$$

Найдем такое z , которое соответствует минимуму СФК на текущем шаге. Эта задача является задачей условной оптимизации, поскольку искомого z должно удовлетворять уравнению $|z|^2 = 1$. Решение может быть найдено методом множителей Лагранжа. Введем лагранжиан следующего вида:

$$L(z, z^*) = G(z) + 2\lambda(z z^* - 1) = \sum_{m,q} \left[a_{mq} |sS(q, p)|^4 + 2b_{mq} |sS(q, p)|^2 + c_{mq} \right] + 2\lambda(z z^* - 1), \quad (15)$$

где λ – множитель Лагранжа; коэффициенты СФК a_{mq}, b_{mq}, c_{mq} вычисляются с использованием РЛИ, полученного на предыдущем $(p - 1)$ -м шаге, в соответствии с (11–13). Отметим, что коэффициенты c_{mq} не влияют на положение максимума функционала (15), поэтому их можно не учитывать. Дифференцируя (15) по z, z^*, λ и приравнявая производные нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Az^2 + Bz + Cz^* + D = 0; \\ A^* z^{2*} + B^* z^* + C^* z + D^* = 0; \\ z z^* - 1 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где $A = \sum_{m,q} a_{mq} P_{mq}^* Q_{mq} |Q_{mq}|^2$;

$B = \sum_{m,q} a_{mq} |Q_{mq}|^2 (2|P_{mq}|^2 + |Q_{mq}|^2) + a_{mq} |Q_{mq}|^2 + \lambda$;

$C = \sum_{m,q} a_{mq} (P_{mq} Q_{mq}^*)^2$;

$D = \sum_{m,q} a_{mq} P_{mq} Q_{mq}^* (|P_{mq}|^2 + 2|Q_{mq}|^2) + b_{mq} P_{mq} Q_{mq}^*$.

Используя третье уравнение в системе (16), ее можно преобразовать к линейной системе относительно переменных z и z^* . Для этого умножим первое уравнение на z^* , второе на z и учтем,

что $z z^* = 1$. В итоге получим следующую линейную относительно z и z^* систему:

$$\begin{cases} \alpha z + \beta z^* = \gamma, \\ \beta^* z + \alpha z^* = \gamma^*, \end{cases} \quad (17)$$

где $\alpha = |C|^2 - |A|^2$, $\beta = B^* C - A^* D$ и $\gamma = A^* B - C D^*$. При записи системы (17) было учтено, что α – действительное число.

Решение этой системы

$$\begin{cases} z = (\alpha\gamma - \beta\gamma^*) / (\alpha^2 - |\beta|^2); \\ z^* = (\alpha\gamma^* - \beta^*\gamma) / (\alpha^2 - |\beta|^2). \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку множитель Лагранжа λ входит только в выражение для B и этот параметр является чисто действительным числом, будем считать подлежащим нахождению неизвестное B . Найдем его, используя равенство $z z^* = 1$, которое с учетом (18) можно переписать в виде

$$(\alpha^2 - |\beta|^2)^2 = |\alpha\gamma - \beta\gamma^*|^2.$$

Так как неизвестное B входит только в переменные β и γ , удобно произвести нормировку этих переменных к действительному α . В итоге получим уравнение

$$(1 - |b(B)|^2)^2 = |c(B) - b(B)c(B)^*|^2, \quad (19)$$

где $b(B) = \beta/\alpha$ и $c(B) = \gamma/\alpha$.

Несложно показать, что (19) является алгебраическим уравнением 4-й степени относительно неизвестного B :

$$a_0 B^4 + a_1 B^3 + a_2 B^2 + a_3 B + a_4 = 0, \quad (20)$$

где $a_j = L_j - R_j, j = 1, \dots, 4$ и

$$\begin{cases} L_0 = |b_1|^4; \\ L_1 = 4 \operatorname{Re}[b_1 b^*] |b_1|^2; \\ L_2 = 4 \operatorname{Re}^2[b_1 b^*] - 2(1 - |b|^2) |b_1|^2; \\ L_3 = -4(1 - |b|^2) \operatorname{Re}[b_1 b^*]; \\ L_4 = (1 - |b|^2)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = |b_1|^2 |c_1|^2; \\ R_1 = -2\operatorname{Re}[b_1^* c_1 (c_1 - b_1 c^* - b c_1^*)]; \\ R_2 = |c_1 - b_1 c^* - b c_1^*|^2 - 2\operatorname{Re}[b_1^* c_1 (c - b c^*)]; \\ R_3 = 2\operatorname{Re}[(c^* - b^* c)(c_1 - b_1 c^* - b c_1^*)]; \\ R_4 = |c - b c^*|^2, \end{cases}$$

$$b = b(0), b_1 = b'(0), c = c(0), c_1 = c'(0).$$

Решив (20), получим 4 корня, из которых надо выбрать один, обеспечивающий равенство $z z^* = 1$ и соответствующий минимуму СФК РЛИ.

Таким образом, находятся фазоры z и z^* . Умножая сигнал $ss(m, p)$ на z , получим $ss_0(m, p) = ss(m, p)z, m = 0, \dots, M - 1$. Этим завершаются вычисления на текущем p -м шаге. Поскольку на каждом шаге решается локальная задача оптимизации, для получения окончательного решения необходимо повторять вычисления по нахождению оценки ФО после прохождения по всем $p(0 \leq p \leq N - 1)$ до тех пор, пока оценка ФО не перестанет изменяться.

Описанная последовательность вычислений повторяется итерационно, пока оценки ФО на соседних итерациях не будут отличаться более чем на некоторое малое значение $\varepsilon > 0$:

$$\max_{\mathbf{x}} |\hat{\phi}_{p+1}(\mathbf{x}) - \hat{\phi}_p(\mathbf{x})| < \varepsilon. \quad (21)$$

При выполнении условия (21) итерационный процесс завершается.

Автофокусировка методом оптимизации линейных суррогатных функций (алгоритм Крэга). Рассмотрим алгоритм автофокусировки, основанный на максимизации ФК РЛИ с использованием ММ-метода, в котором СФК является линейной и соответствует касательной к ФК [17]. В качестве локальной ФК в [17] была взята квадратичная функция $f(x) = x^2$. Получающийся при таких допущениях алгоритм по количеству вычислений проще рассмотренного выше, поэтому его удобно использовать для оценки качества работы алгоритма, предлагаемого в статье.

Суть алгоритма Крэга заключается в локальной аппроксимации ФК $f(x)$ линейной функцией $y(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = bx + c$, где

$b = y_1$ и $c = y_0 - y_1 x_0$. При такой аппроксимации, используя тот же подход, что и ранее, найдем z , которое соответствует максимуму СФК на текущем шаге. Решение может быть также найдено методом множителей Лагранжа при лагранжиане следующего вида:

$$L(z, z^*) = F(z) + \lambda(z z^* - 1) = \sum_{m,q} \left[\frac{b_{mq} |P_m(q, p) + z Q_m(q, p)|^2}{+ c_{mq} + \lambda(z z^* - 1)} \right], \quad (22)$$

где λ – множитель Лагранжа; коэффициенты СФК $b_{mq} = 2I_{mq}$ вычисляются с использованием РЛИ, полученного на предыдущем $(p - 1)$ -м шаге. Коэффициенты c_{mq} , как и в предыдущем случае, можно не вычислять, так как они не влияют на положение максимума функционала (22).

Выбор линейной СФК значительно упрощает поиск фазора z , так как его нахождение не требует решения алгебраических уравнений. Окончательное решение на p -м шаге имеет вид

$$z = \frac{\sum_{m,q} b_{mq} P_m(q, p) Q_m^*(q, p)}{\left| \sum_{m,q} b_{mq} P_m(q, p) Q_m^*(q, p) \right|}.$$

Как и в предыдущем случае, поиск фазора продолжается до тех пор, пока оценка ФО не перестанет изменяться.

Результаты математического моделирования алгоритма автофокусировки. Для проверки предлагаемого алгоритма использовалось математическое моделирование. В качестве СФК были взяты $f_1(x) = -(x + \beta) \ln(x + \beta)$, $f_2(x) = -\ln(x + \beta)$. СФК $f_1(x)$ требует решения задачи минимизации; СФК $f_2(x)$ – максимизации. Следует отметить, что энтропийная СФК $f(x) = -x \ln x$ имеет особенность в точке $x = 0$, где ее первая $f'(x) = -(1 + \ln x)$ и вторая $f''(x) = -1/x$ производные имеют бесконечное значение. Эта особенность, как показало математическое моделирование, негативно сказывается на сходимости алгоритмов АФ, поэтому данная ФК была заменена на

$f_1(x) = -(x + \beta) \ln(x + \beta)$, где β – максимальное значение РЛИ [14]. Это же значение параметра β было использовано для логарифмической ФК $f_2(x) = -\ln(x + \beta)$.

Результаты моделирования работы алгоритма при энтропийной ФК $f_1(x)$ приведены на рис. 2–5. Для других ФК соответствующие рисунки выглядят аналогично. Сценарные параметры моделирования были выбраны следующими:

- длина волны РСА – 3.2 см;
- период повторения зондирующих импульсов – 0.495 мс;
- отношение сигнал/шум – 20 дБ;
- скорость движения носителя – 50 м/с;
- дальность до ближней к носителю границы РЛИ – 10 км;
- размер РЛИ – 32×512 ;
- СКО траекторных нестабильностей – 0.1 м;
- радиус корреляции траекторных нестабильностей – 1.125 м.

На наблюдаемом участке поверхности были смоделированы 11 светящихся точек со случайными координатами на плоскости "поперечная дальность – продольная дальность" и случайными комплексными амплитудами. Неискаженное траекторными нестабильностями РЛИ приведено на рис. 2. Траекторные нестабильности моделировались отрезком случайного нормального процесса с заданными СКО и радиусом корреляции $\rho = 1.125$ м. На рис. 3 приведено РЛИ, полученное синтезированием апертуры без АФ. Истинная ФО на интервале наблюдения приведена на рис. 4 (штриховая линия). ФО имели высокие значения, поэтому, как следует из рис. 2, РЛИ каждой светя-

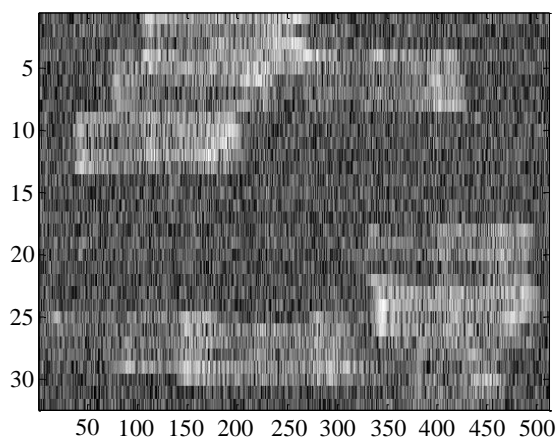


Рис. 3. Радиолокационное изображение с искажениями
 Fig. 3. The radar image with blurring

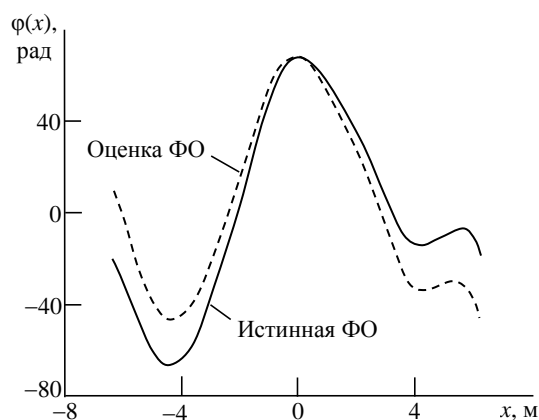


Рис. 4. Истинная фазовая ошибка и ее оценка
 Fig. 4. The true phase error and its estimate

щейся точки получились сильно расфокусированными по поперечной дальности. Поскольку миграции светящихся точек по дальности в работе не моделировались, размытие РЛИ светящихся точек по этой координате не наблюдается. Результат оценки ФО предлагаемым алгоритмом приведен на рис. 4 (сплошная линия). Финальное РЛИ,

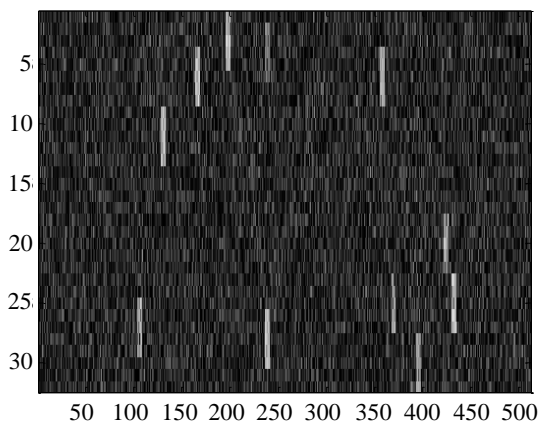


Рис. 2. Радиолокационное изображение без искажений
 Fig. 2. The radar image without blurring

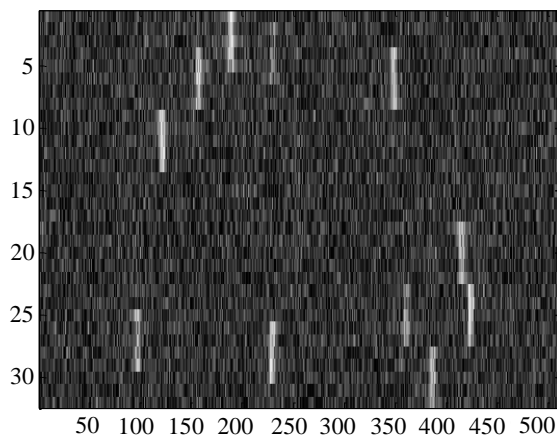


Рис. 5. Восстановленное радиолокационное изображение
 Fig. 5. The restored radar image

полученное в результате компенсации ФО, показано на рис. 5. Сравнение рис. 2 и 5 подтверждает правильность работы алгоритма: изображения светящихся точек на финальном РЛИ получились хорошо сфокусированными.

Рассмотрим результаты сравнения предлагаемого алгоритма и алгоритма Крэга. Для проведения сравнительного анализа были смоделированы 100 реализаций ТН с указанными ранее параметрами. Итерационный процесс оценивания ФО останавливался, когда в соответствии с (21) разница между оценками ФО на следующих друг за другом итерациях становилась меньше значения $\varepsilon = \pi/32$. Сравнение алгоритмов проводилось по трем показателям:

- количеству удачных испытаний при восстановлении РЛИ K ;
- СКО остаточной ФО в удачных попытках $\sigma_{\text{ФО}}$;
- среднему количеству итераций в удачных попытках восстановления M .

Попытка восстановления считалась успешной, если СКО остаточной ФО $\sigma_{\text{ФО}}$ было меньше $\pi/4$. Результаты сравнения сведены в таблицу.

Показатели качества алгоритмов АФ
 Quality parameters of autofocus algorithms

СФК	K	$\sigma_{\text{ФО}}$, рад	M
Линейная, $f_1(x)$	99	0.003366	6.88
Линейная, $f_2(x)$	100	0.002953	7.11
Квадратичная, $f_1(x)$	100	0.002680	6.32
Квадратичная, $f_2(x)$	100	0.001974	6.62

Как следует из таблицы, свойства предлагаемого алгоритма слабо зависят от выбранной СФК. Однако результаты моделирования, полученные для логарифмической СФК $f_2(x)$, лучше, чем результаты для энтропийной СФК $f_1(x)$. Вместе с тем, по сравнению с алгоритмом Крэга предлагаемый алгоритм дал СКО остаточной ФО $\sigma_{\text{ФО}}$,

примерно в 1.5 раза меньшую при меньшем приблизительно на 10 % количестве итераций M .

Перечисленные свойства являются серьезным доводом в пользу предлагаемого алгоритма. К недостаткам алгоритма следует отнести необходимость решать алгебраическое уравнение четвертой степени. Однако задача нахождения нужного корня этого уравнения значительно упрощается, если учесть, что искомый корень должен быть чисто действительным и положительным.

Заключение. В статье описан универсальный алгоритм автофокусировки, который может быть использован в РСА. Алгоритм основан на ММ-методе оптимизации и позволяет оценить фазовые ошибки, вызванные случайными траекторными неустойчивостями полета носителя РСА, посредством оптимизации квадратичных суррогатных функций качества РЛИ. Параметры квадратичной СФК выбираются таким образом, чтобы она являлась мажорантой (при решении задачи минимизации) или минорантой (при решении задачи максимизации) выбранной целевой функции качества РЛИ. Предлагаемый алгоритм является итерационным и легко перестраивается под выбранную целевую функцию качества. Для этого требуется лишь определить старший коэффициент квадратической суррогатной функции качества. Недостатком предлагаемого алгоритма является необходимость находить положительный действительный корень алгебраического уравнения четвертой степени. Результаты математического моделирования подтверждают работоспособность рассмотренного алгоритма при больших значениях фазовых ошибок. Проведено сравнение предлагаемого алгоритма и алгоритма Крэга, который также использует ММ-метод оптимизации, но при линейных суррогатных функциях качества. Математическое моделирование показало, что предлагаемый алгоритм при использованном в работе сценарии машинного эксперимента более устойчив и дает при примерно на 10 % меньшем количестве итераций оценку фазовых ошибок в 1.5 раза более точную, чем алгоритм Крэга, в котором также используется ММ-метод оптимизации, но при линейной суррогатной функции качества.

Список литературы

1. Cumming I. G., Wong F. H. Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation. Boston, MA, USA: Artech House, 2005.
2. Xi L., Guosui L., Ni J. Autofocusing of ISAR images based on entropy minimization // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. Oct. 1999. Vol. AES-35, № 4. P. 1240–1252. doi: 10.1109/7.805442
3. Wang J., Liu X. SAR minimum-entropy autofocus using an adaptive-order polynomial model // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett. Oct. 2006. Vol. 3, № 4. P. 512–516. doi: 10.1109/lgrs.2006.878446
4. Zeng T., Wang R., Li F. SAR image autofocus utilizing minimum-entropy criterion // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett. 2013. Vol. 10, № 6. P. 1552–1556. doi: 10.1109/lgrs.2013.2261975
5. Berizzi F., Corsini G. Autofocusing of inverse synthetic aperture radar images using contrast optimization // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1996. Vol. AES-32, № 3. P. 1185–1191. doi: 10.1109/7.532282
6. Fortune S. A., Hayes M. P., Gough P. T. Contrast optimization of coherent images // Oceans, Celebrating the Past... Teaming Toward the Future (IEEE Cat. № 03CH37492), San Diego, CA, USA. 2003. Vol. 5. P. 2622–2628. doi: 10.1109/oceans.2003.1282986
7. A contrast-based algorithm for synthetic range-profile motion compensation / F. Berizzi, M. Martorella, A. Cacciamano, A. Capria // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. 2008. Vol. GRS-46, № 10. P. 3053–3062. doi: 10.1109/tgrs.2008.2002576
8. Fienup J. R. Synthetic-aperture radar autofocus by maximizing sharpness // Optics Lett. 2000. Vol. 25, № 4. P. 221–223. doi: 10.1364/ol.25.000221
9. Fienup J. R., Miller J. J. Aberration correction by maximizing generalized sharpness metrics // J. of the Optical Society of America. 2003. Vol. 20, № 4. P. 609–620. doi: 10.1364/josaa.20.000609
10. Morrison R. L., Do M. N., Munson D. C. SAR Image Autofocus by Sharpness Optimization: A Theoretical Study // IEEE Trans. on Image Processing. 2007. Vol. 16, iss. 9. P. 2309–2321. doi: 10.1109/tip.2007.903252
11. Sharpness-based autofocus for stripmap SAR using an adaptive-order polynomial model / Y. Gao, W. Yu, Y. Liu, R. Wang, C. Shi // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett. 2014. Vol. 11, № 6. P. 1086–1090. doi: 10.1109/lgrs.2013.2286410
12. Gao Y., Yu W., Liu Y., Wang R. Autofocus algorithm for SAR imagery based on sharpness optimization // Electronics Lett. 2014. Vol. 50, № 11. P. 830–832. doi: 10.1049/el.2013.4111
13. Монаков А. А. Автофокусировка радиолокационных изображений методом максимизации резкости // XXIV Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж, апр. 2018 г. Воронеж, 2018. Т. 3. С. 321–334.
14. Schulz T. J. Optimal Sharpness Function for SAR Autofocus // IEEE Signal Processing Lett. 2007. Vol. 14, № 1. P. 27–30. doi: 10.1109/lsp.2006.881525
15. Lange K., Hunter D. R., Yang I. Optimization transfer using surrogate objective functions // J. of Computational and Graphical Statistics. 2000. Vol. 9, № 1. P. 1–20. doi: 10.2307/1390605
16. Hunter D. R., Lange K. A Tutorial on MM algorithms // The American Statistician. 2004. Vol. 58, № 1. P. 30–37. doi: 10.1198/0003130042836
17. De Leeuw J., Lange K. Sharp quadratic majorization in one dimension // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. Vol. 53, № 7. P. 2471–2484. doi: 10.1016/j.csda.2009.01.002
18. Kragh T. J. Monotonic iterative algorithm for minimum-entropy autofocus // In Proc. of the Adaptive Sensor Array Processing (ASAP) Workshop, 2006, Lexington, MA, USA, 6–7 June 2006.
19. Precision SAR processing using chirp scaling / R. K. Raney, H. Runge, R. Bamler, I. G. Cumming, F. H. Wong // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. 1994. Vol. 32, iss. 4. P. 786–799. doi: 10.1109/36.298008
20. Moreira A., Huang Y. Airborne SAR Processing of highly squinted data using a chirp scaling algorithm with integrated motion compensation // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. 1994. Vol. 32, № 5. P. 1029–1040. doi: 10.1109/36.312891
21. Cafforio C., Pratti C., Rocca F. SAR Data Focusing Using Seismic Migration Techniques // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1991. Vol. AES-27, № 2. P. 194–207. doi: 10.1109/7.78293
22. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.

Информация об авторе

Монаков Андрей Алексеевич – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – цифровая обработка сигналов; радиолокация; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением. Адрес: Институт радиотехники, электроники и связи, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67а, Санкт-Петербург, 190121, Россия
E-mail: a_monakov@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

References

1. Cumming I. G., Wong F. H. *Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation*. Boston, MA, USA, Artech House, 2005.
2. Xi L., Guosui L., Ni J. Autofocusing of ISAR images based on entropy minimization. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. Oct. 1999, vol. AES-35, no. 4, pp. 1240–1252. doi: 10.1109/7.805442
3. Wang J., Liu X. SAR minimum-entropy autofocus using an adaptive-order polynomial model. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett.* Oct. 2006, vol. 3, no. 4, pp. 512–516. doi: 10.1109/lgrs.2006.878446.
4. Zeng T., Wang R., Li F. SAR image autofocus utilizing minimum-entropy criterion. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett.* Nov. 2013, vol. 10, no. 6, pp. 1552–1556. doi: 10.1109/lgrs.2013.2261975
5. Berizzi F., Corsini G. Autofocusing of inverse synthetic aperture radar images using contrast optimization. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. July 1996, vol. AES-32, no. 3, pp. 1185–1191. doi: 10.1109/7.532282
6. Fortune S. A., Hayes M. P., Gough P. T. Contrast optimisation of coherent images. *Oceans, Celebrating the Past... Teaming Toward the Future (IEEE Cat. no. 03CH37492)*. San Diego, CA, USA, 2003, vol. 5, pp. 2622–2628. doi: 10.1109/oceans.2003.1282986
7. Berizzi F., Martorella M., Cacciamao A., Capria A. A contrast-based algorithm for synthetic range-profile motion compensation. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*. Oct. 2008, vol. GRS-46, no. 10, pp. 3053–3062. doi: 10.1109/tgrs.2008.2002576
8. Fienup J. R. Synthetic-aperture radar autofocus by maximizing sharpness. *Optics Lett.* 2000, vol. 25, no. 4, pp. 221–223. doi: 10.1364/ol.25.000221
9. Fienup J. R., Miller J. J. Aberration correction by maximizing generalized sharpness metrics. *J. of the Optical Society of America*. 2003, vol. 20, no. 4, pp. 609–620. doi: 10.1364/josaa.20.000609
10. Morrison R. L., Do M. N., Munson D. C. SAR Image Autofocus By Sharpness Optimization: A Theoretical Study. *IEEE Trans. on Image Processing*. 2007, vol. 16, iss. 9, pp. 2309–2321. doi: 10.1109/tip.2007.903252
11. Gao Y., Yu W., Liu Y., Wang R., Shi C. Sharpness-based autofocus for stripmap SAR using an adaptive-order polynomial model. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing Lett.* June 2014, vol. 11, no. 6, pp. 1086–1090. doi: 10.1109/lgrs.2013.2286410
12. Gao Y., Yu W., Liu Y., Wang R. Autofocus algorithm for SAR imagery based on sharpness optimization. *Electronics Lett.* May 2014, vol. 50, no. 11, pp. 830–832. doi: 10.1049/el.2013.4111
13. Monakov A. A. Autofocusing of radar images by sharpness maximization. XXIV Intern. scientific conf. "Radiolocation, Navigation and Communication". Apr. 2018, Voronezh, vol. 3, pp. 321–334. (In Russ.)
14. Schulz T. J. Optimal Sharpness Function for SAR Autofocus. *IEEE Signal Processing Lett.* Jan. 2007, vol. 14, no. 1, pp. 27–30. doi: 10.1109/lsp.2006.881525
15. Lange K., Hunter D. R., Yang I. Optimization transfer using surrogate objective functions. *J. of Computational and Graphical Statistics*. March 2000, vol. 9, no. 1, pp. 1–20. doi: 10.2307/1390605
16. Hunter D. R., Lange K. A Tutorial on MM algorithms. *The American Statistician*. 2004, vol. 58, no. 1, pp. 30–37. doi: 10.1198/0003130042836
17. De Leeuw J., Lange, K. Sharp quadratic majorization in one dimension. *Computational Statistics and Data Analysis*. May 2009, vol. 53, no. 7, pp. 2471–2484. doi: 10.1016/j.csda.2009.01.002
18. Kragh T. J. Monotonic iterative algorithm for minimum-entropy autofocus. In *Proc. of the Adaptive Sensor Array Processing (ASAP) Workshop*, 2006. Lexington, MA, USA, 6–7 June 2006.
19. Raney R. K., Runge H., Bamler R. Cumming I., Wong F. Precision SAR processing using chirp scaling. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*. July 1994, vol. 32, no. 4, pp. 786–799. doi: 10.1109/36.298008
20. Moreira A., Huang Y. Airborne SAR Processing of highly squinted data using a chirp scaling algorithm with integrated motion compensation. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*. Sept. 1994, vol. 32, no. 5, pp. 1029–1040. doi: 10.1109/36.312891
21. Cafforio C., Pratti C., Rocca F. SAR Data Focusing Using Seismic Migration Techniques. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. 1991, vol. AES-27, no. 2, pp. 194–207. doi: 10.1109/7.78293
22. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical optimization*. London, New York, Academic Press, 1981. (In Russ.)

Information about the author

Andrey A. Monakov, Dr. Sci. (Eng.) (2000), Professor (2005) of the Department of radio equipment systems of the Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Honorable Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honorable Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: digital signal processing; radar theory; microwave remote sensing; air traffic control.

Address: Institute of Radio Engineering, Electronics and Communications, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67A Bolshaja Morskaja St., St Petersburg 190121, Russia

E-mail: a_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>