

Анализ и обработка OFDM-сигналов в условиях шума с использованием вейвлет-преобразования при временной синхронизации

В. В. Егоров¹, Д. М. Клионский^{2✉}

¹Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"
им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ klion2003@list.ru

Аннотация

Введение. Вопросы временной синхронизации актуальны для систем радиосвязи, радионавигации, радиолокации, определения моментов прихода импульсных сигналов, позиционирования. Так, в канале радиосвязи необходимо обеспечить безошибочную передачу информации (файлов) от передатчика к приемнику с максимально возможной скоростью передачи. При этом повышение точности синхронизации повышает скорость передачи информации. В известных решениях задачи синхронизации при передаче OFDM-сигналов (Orthogonal frequency-division multiplexing – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов) применяется защитный интервал для вычисления периодической автокорреляционной функции анализируемого OFDM-сигнала, что приводит к непроизводительным затратам временного ресурса. В статье рассмотрена обработка и анализ OFDM-сигналов в условиях шума с целью оценивания моментов их прихода без применения указанного интервала.

Цель работы. Разработка алгоритма временной синхронизации OFDM-сигналов при наличии шума в канале радиосвязи с использованием быстрых вычислительных алгоритмов на основе гармонического вейвлет-преобразования.

Материалы и методы. В рамках проведенного исследования использованы методы вейвлет-преобразования и вейвлет-обработки сигналов, включая гармоническое вейвлет-преобразование с использованием октавного банка цифровых фильтров и быстрые вычислительные алгоритмы для вычисления гармонического вейвлет-преобразования.

Результаты. Предложен метод обработки OFDM-сигнала в условиях шума на основе гармонического вейвлет-преобразования, позволяющий определять границы интервалов ортогональности указанного сигнала и моменты их начала и окончания. Также предложен алгоритм определения момента прихода OFDM-сигнала. Показано, что с увеличением окна анализа сигнала удастся повысить точность установления временного синхронизма, однако при этом затраты времени на установление синхронизма увеличиваются. Предложенное в настоящей статье решение позволяет отказаться от использования защитного интервала и тем самым значительно повысить скорость передачи информации. В основе временной синхронизации лежит быстрый вычислительный алгоритм с использованием гармонического вейвлет-преобразования, работоспособный в режиме реального времени и робастный по отношению к каналному шуму.

Заключение. Гармоническое вейвлет-преобразование эффективно в задаче анализа и обработки OFDM-сигнала как при наличии, так и при отсутствии шума. Оно позволяет с максимально возможной точностью определять границы интервалов ортогональности OFDM-сигналов.

Ключевые слова: временная синхронизация, нестационарный канал радиосвязи, OFDM-сигнал, гармоническое вейвлет-преобразование, быстрые вычислительные алгоритмы, каналный шум, интервал ортогональности

Для цитирования: Егоров В. В., Клионский Д. М. Анализ и обработка OFDM-сигналов в условиях шума с использованием вейвлет-преобразования при временной синхронизации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2025. Т. 28, № 1. С. 65–76. doi: 10.32603/1993-8985-2025-28-1-65-76

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 09.10.2024; принята к публикации после рецензирования 18.11.2024; опубликована онлайн 28.02.2025



OFDM Signal Processing and Analysis in the Presence of Noise Using Wavelet Transform for Temporal Synchronization

Vladimir V. Egorov¹, Dmitry M. Klionskiy²✉

¹Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St Petersburg, Russia

²Saint Petersburg Electrotechnical University, St Petersburg, Russia

✉ klio2003@list.ru

Abstract

Introduction. Temporal synchronization is a relevant issue for various radio communication, radio navigation, and radar systems, for determination of time points for impulse signal arrival and positioning. The radio communication problem should ensure an error-free signal transmission via a radio channel at a maximum possible transmission rate. The known solutions of the temporal synchronization problem in the case of orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) signal transmission employ a guard interval for computing the periodic autocorrelation function of the analyzed OFDM-signal, which leads to unproductive costs of the time-frequency resource. In this paper, we discuss the problem of processing and analysis of OFDM-signals in the presence of noise and estimation of the time point of OFDM-signal arrival.

Aim. Development of an algorithm for time synchronization of OFDM signals in the presence of noise in the radio communication channel using fast computing algorithms based on the harmonic wavelet transform.

Materials and methods. The research was conducted using the methods of wavelet transform and wavelet-based signal processing including the harmonic wavelet transform on the basis of the octave filter bank, fast computational algorithms aimed at computing the harmonic wavelet transform.

Results. A new method for OFDM signal processing in the presence of noise based on the octave harmonic wavelet transform is suggested. This method allows determination of boundaries of orthogonality intervals in an OFDM-signal along with the moments of the onset and end of orthogonality intervals. An algorithm for finding the time point of OFDM signal arrival is proposed. It is shown that the increase of the analysis window of an OFDM signal leads to an improvement in the temporal synchronization accuracy, although requiring more time for establishing synchronization. The suggested approach does not employ the guard interval, thus increasing the information transmission rate.

Conclusion. The harmonic wavelet transform is effective for the analysis and processing of OFDM signals. Furthermore, the aforementioned transform works perfectly well both in the absence and in the presence of noise. The harmonic wavelet transform allows determination of boundaries of orthogonality intervals with maximum possible accuracy. Based on complex vectors, which correspond to the boundaries of orthogonality intervals, the time point of OFDM-signal arrival can be found.

Keywords: temporal synchronization, non-stationary radio channel, OFDM signal, harmonic wavelet transform, fast computational algorithms, channel noise, orthogonality interval

For citation: Egorov V. V., Klionskiy D. M. OFDM Signal Processing and Analysis in the Presence of Noise Using Wavelet Transform for Temporal Synchronization. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2025, vol. 28, no. 1, pp. 65–76. doi: 10.32603/1993-8985-2025-28-1-65-76

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Submitted 09.10.2024; accepted 18.11.2024; published online 28.02.2025

Введение. В настоящее время в области телекоммуникаций для высокоскоростной передачи данных по нестационарным, в том числе коротковолновым, радиоканалам часто применяются OFDM-сигналы (Orthogonal frequency-division multiplexing – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением кана-

лов) [1–4]. При обработке таких сигналов используются методы быстрых дискретных преобразований, что позволяет обрабатывать их в реальном масштабе времени. При преобразованиях учитывается ортогональное частотное разделение каналов, составляющих OFDM-сигнал. OFDM-сигналы используются в таких задачах,

как частотная и временная синхронизация, быстрые дискретные преобразования и др.

OFDM-сигнал представляет собой мультигармонический (полигармонический) сигнал, состоящий из конечного набора дискретных составляющих на субчастотах. При рассмотрении OFDM-сигнала вводится понятие "интервала ортогональности" как временного промежутка, на котором все дискретные сигнальные составляющие на субчастотах ортогональны. Длительность интервала ортогональности и величина частотного разнесения (расстояния между субчастотами) выбираются из условия ортогональности сигналов на субчастотах. При этом возможно перекрытие спектров составляющих на отдельных субчастотах.

Аналитическое описание (математическая модель) информационного OFDM-сигнала имеет вид [5]:

$$s(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K c_k^{(l)} \cos[\omega_k(t - \Delta t_k) + \psi_k^{(l)}], \quad (1)$$

где $l = \overline{1, L}$ – номер интервала ортогональности информационного OFDM-сигнала (обработка информационного сигнала на приемной стороне осуществляется по интервалам заданной длительности T); L – количество интервалов длительностью T излучаемого сигнала; $k = \overline{1, K}$ – номер луча (субгармоники) сигнала; K – количество субчастот многочастотного OFDM-сигнала, на которых происходит излучение; $c_k^{(l)}$, $\psi_k^{(l)}$ – амплитуда и начальная фаза k -го луча (субгармоники) на интервале ортогональности с номером l соответственно; ω_k – k -я субчастота излучения, Δt_k – временная задержка k -го луча в канале.

Сигнал излучается интервалами длительностью T , при этом все частотные составляющие сигнала на частотах ω_k излучаются одновременно. Начальные фазы $\psi_k^{(l)}$, соответствующие l -му интервалу ортогональности, являются случайными величинами, зависящими от передаваемого символа, и изменяются при переходе от одной гармоники к другой.

Частота k -й гармоники излучения кратна периоду дискретизации по частоте и определяется соотношениями $\omega_k = k\Delta\omega$; $\Delta\omega = 2\pi/T$.

Анализ и обработка OFDM-сигналов в условиях шума с использованием вейвлет-преобразования при временной синхронизации
OFDM Signal Processing and Analysis in the Presence of Noise
Using Wavelet Transform for Temporal Synchronization

Математическая модель информационного OFDM-сигнала также может быть представлена в синусно-косинусной форме:

$$s(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K [a_k^{(l)} \cos(\omega_k t) + b_k^{(l)} \sin(\omega_k t)], \quad (2)$$

где $\{a_k^{(l)}, b_k^{(l)}\}$ – набор информационных параметров, который также меняется при переходе от интервала ортогональности длительностью T с номером l к последующему интервалу с номером $l+1$.

На приемной стороне все частоты ω_k претерпевают смещение $\delta\omega$:

$$\bar{\omega}_k = \omega_k + \delta\omega, \quad k = \overline{1, K},$$

происходящее за счет доплеровского эффекта, а также за счет рассогласования частот принимаемого сигнала и опорного генератора.

На каждом интервале ортогональности математическая модель сигнала сохраняется неизменной в соответствии с (1) или (2), однако при переходе от l -го к $(l+1)$ -му интервалу ортогональности меняются параметры моделей – величины $\{c_k^{(l)}\}$ в (1) и $\{a_k^{(l)}, b_k^{(l)}\}$ в (2).

Информационный сигнал $\bar{s}(t)$ на приемной стороне описывается математической моделью

$$\bar{s}(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \left\{ a_k^{(l)} \gamma_k \cos[\bar{\omega}_k(t - \tau_{\text{зап}, k})] + b_k^{(l)} \gamma_k \sin[\bar{\omega}_k(t - \tau_{\text{зап}, k})] \right\},$$

где γ_k – множитель, описывающий частотно-селективные свойства радиоканала; $\tau_{\text{зап}, k}$ – временное запаздывание k -й гармоники на субчастоте ω_k .

Структурная диаграмма информационного OFDM-сигнала. OFDM-сигнал схематично представлен на рис. 1, иллюстрирующем его основные структурные особенности. На каждом интервале ортогональности длительностью T сигнал является мультигармоническим (полигармоническим), т. е. представляет собой конечный набор дискретных гармоник с амплитудами $\{c_k^{(l)}\}$, если руководствоваться представлением OFDM-сигнала в косинусной форме (1) [5], и амплитудами синусно-косинусных

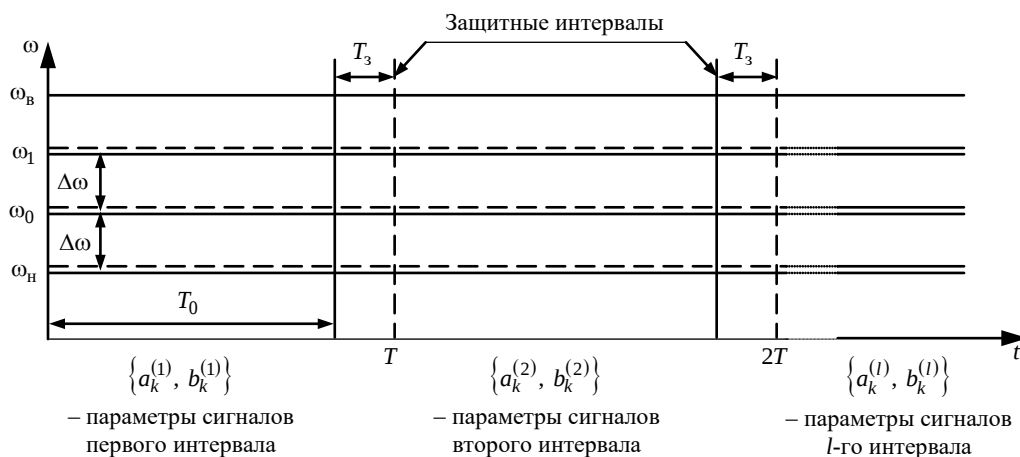


Рис. 1. Частотно-временная диаграмма информационного OFDM-сигнала

Fig. 1. Time-frequency diagram of information OFDM signal

составляющих $\{a_k^{(l)}, b_k^{(l)}\}$, если следовать альтернативному представлению OFDM-сигнала в синусно-косинусной форме (2) [5].

Интервал ортогональности T включает в себя защитный интервал T_3 , в котором периодически продолжается информационный сигнал. Защитный интервал позволяет избавиться от влияния межсимвольных искажений при демодуляции. Межсимвольные и межканальные помехи также могут возникать из-за нарушения ортогональности на соседних интервалах, если временная синхронизация была установлена неточно, что является критичным при использовании OFDM-сигналов.

На рис. 1 несущие частоты отдельных каналов, составляющих OFDM-сигнал, расположены эквидистантно в диапазоне от f_H до f_B . Указанные ранее смещения субчастот на приемной стороне отображены на рисунке горизонтальными штриховыми линиями.

Параметры OFDM-сигнала $\{a_k^{(l)}, b_k^{(l)}\}$ представлены в табл. 1.

На рис. 1 моменты времени перехода к новому интервалу ортогональности обозначены как $T, 2T, 3T, \dots, kT$. Границы интервалов ортогональности необходимо определить с максимально возможной точностью в процессе установки временной синхронизации.

Исследование OFDM-сигнала, принятого в условиях шума. Рассмотрим прием OFDM-сигнала в условиях белого гауссовского шума [6–12]. Моменты смены ортогональности сиг-

Табл. 1. Информационные параметры OFDM-сигнала

(распределение по интервалам ортогональности)

Tab. 1. Information parameters of OFDM signal (distribution over orthogonality intervals)

Номер интервала ортогональности OFDM-сигнала	Частота	Передаваемые параметры OFDM-сигнала
1	ω_1	$a_1^{(1)}, b_1^{(1)}$
	ω_2	$a_2^{(1)}, b_2^{(1)}$
	...	...
	ω_k	$a_k^{(1)}, b_k^{(1)}$
2	ω_1	$a_1^{(2)}, b_1^{(2)}$
	ω_2	$a_2^{(2)}, b_2^{(2)}$
	...	...
	ω_k	$a_k^{(2)}, b_k^{(2)}$
3	ω_1	$a_1^{(3)}, b_1^{(3)}$
	ω_2	$a_2^{(3)}, b_2^{(3)}$
	...	...
	ω_k	$a_k^{(3)}, b_k^{(3)}$
...	...	...
l	ω_1	$a_1^{(l)}, b_1^{(l)}$
	ω_2	$a_2^{(l)}, b_2^{(l)}$
	...	...
	ω_k	$a_k^{(l)}, b_k^{(l)}$

нала t_l , (рис. 2), введенные в сигнал при его формировании, подчиняются соотношению: $t_l = lT + t_0$, где t_0 – смещение интервала ортогональности относительно момента начала наблюдения (момент начала наблюдения обозначен на рис. 2).

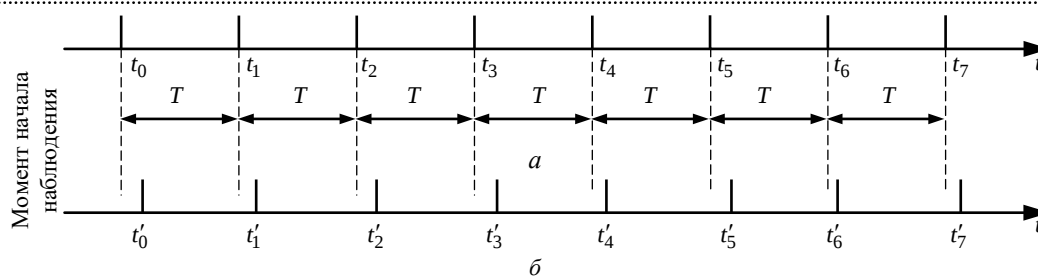


Рис. 2. Границы интервалов ортогональности OFDM-сигнала (а) и их оценки (б)

Fig. 2. Boundaries of orthogonality intervals of OFDM signal (a) and their estimates (b)

Оценки границ интервалов ортогональности t'_i смещаются относительно действительных позиций в результате воздействия шума, присутствующего в аддитивной смеси с анализируемым OFDM-сигналом. Задачей анализа является определение t_l и параметров OFDM-сигнала, а также определение смещения t_0 .

Решение поставленных задач базируется на разложении анализируемого сигнала по системе базисных функций. Для компактного разложения (минимизации количества значащих параметров) необходимо, чтобы интервалы локализации базисных функций не превышали интервалов ортогональности анализируемого сигнала. Анализируемый OFDM-сигнал имеет конечные интервалы ортогональности во времени (интервал ортогональности) и по частоте (набор частот составляющих сигналов). Аналогичным свойством локализации обладает базис на основе гармонических вейвлетов [13–18].

Вейвлет-преобразование. Гармоническое вейвлет-преобразование (вейвлет-преобразование в базисе гармонических вейвлетов) позволяет представить анализируемый сигнал на основе масштабирующей функции

$$\phi(t-p) = \frac{e^{i2\pi(t-p)} - 1}{i2\pi(t-p)}$$

и базисных вейвлетов

$$w(2^j t - p) = \frac{e^{i4\pi(2^j t - p)} - e^{i2\pi(2^j t - p)}}{i2\pi(2^j t - p)},$$

где p – временной сдвиг; j – номер уровня вейвлет-разложения; $i = \sqrt{-1}$.

Представление сигнала в рассматриваемом базисе имеет вид

$$s(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_{\phi}(p) \phi(t-p) + \tilde{\alpha}_{\phi}(p) \phi^*(t-p) \right] \right\} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_j(p) w(2^j t - p) + \tilde{\alpha}_j(p) w^*(2^j t - p) \right] \right\},$$

где

$$\alpha_{\phi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \phi^*(t-p) dt;$$

$$\tilde{\alpha}_{\phi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \phi(t-p) dt;$$

$$\alpha_j(p) = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) w^*(2^j t - p) dt;$$

$$\tilde{\alpha}_j(p) = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) w(2^j t - p) dt$$

– комплекснозначные вейвлет-коэффициенты, причем $*$ – символ операции комплексного сопряжения.

Результаты преобразования. Точность оценки положения границ интервала ортогональности определяется временным разрешением, обеспечиваемым разложением. Наилучшее разрешение обеспечивает наиболее компактная (с минимальным интервалом определения во времени) вейвлет-функция, которой соответствует максимальное значение номера j . Далее такой уровень вейвлет-разложения называется самым "тонким".

При анализе устанавливается порог. Вейвлет-коэффициенты, превышающие пороговое значение, рассматриваются как значащие, соответствующие границам интервала ортогональности, а вейвлет-коэффициенты, уступающие

порогу, соответствуют шуму, присутствующему в сигнале. Вейвлет-коэффициенты, соответствующие неискаженному шумом OFDM-сигналу, имеют близкие к нулю значения.

Показанные на рис. 2 оценки временных границ t'_k получены в результате октавного гармонического вейвлет-преобразования OFDM-сигнала [19–24].

Процедуру оценивания границ интервалов ортогональности OFDM-сигнала можно представить следующей последовательностью шагов [22]:

1. Анализ вещественной части $\text{Re}\alpha_q(p)$ комплекснозначных вейвлет-коэффициентов самого "тонкого" уровня гармонического вейвлет-разложения с номером q :

$$\alpha_q(p), q = (\log_2 N) - 1; p = N/4, \dots, N/2 - 1,$$

где N – длина сигнала.

2. Вычисление модифицированных вейвлет-коэффициентов $\text{Re}\alpha_q(p)$ с целью удаления шума с самого "тонкого" уровня вейвлет-разложения:

$$\hat{\alpha}_{1q}(p) = \begin{cases} \alpha_{1q}(p) - \frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N}, & \text{если } \alpha_{1q}(p) > \frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N}; \\ 0, & \\ \text{если } -\frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N} < \alpha_{1q}(p) \leq \frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N}; & \\ \alpha_{1q}(p) + \frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N}, & \\ \text{если } \alpha_{1q}(p) \leq -\frac{\sigma_q}{\sqrt{2} \cdot 2^{j/2}} \sqrt{2 \ln N}, & \end{cases}$$

где

$$\sigma_q = \frac{\text{Med}\left\{\left|\alpha_{1q}(p) - \text{Med}\{\alpha_{1q}(p)\}\right|\right\}}{0.6745}, p = N/4, \dots, N/2 - 1$$

– среднее квадратическое отклонение, определенное через медиану $\text{Med}\{\cdot\}$ абсолютных отклонений.

3. Выделение участков с незначимыми вейвлет-коэффициентами.

Вейвлет-коэффициенты $\alpha_q(p)$ OFDM-сигнала полагаются незначимыми, если они удовлетворяют условию

$$|\alpha_q(p)| < \eta,$$

$$q = (\log_2 N) - 1, p = N/4, \dots, N/2 - 1,$$

где $\eta \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$ – порог, принимающий близкие к нулю значения.

4. Границы интервалов ортогональности устанавливаются для значений p вейвлет-коэффициентов, превышающих порог. Далее границы пересчитываются во временную область.

В отсутствие шума (рис. 2, а) промежутки между моментами времени t_i и t_{i+1} ($i \geq 1$) одинаковы и равны интервалу ортогональности T . При обработке зашумленного OFDM-сигнала (рис. 2, б) эти оценки границ, в общем случае, смещены относительно значений, полученных при моделировании незашумленного сигнала. Дисперсия установленных границ временной синхронизации определяется как

$$D = \sigma_{\text{уст}}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L (t_l - t'_l)^2,$$

где L – количество экспериментально определенных временных границ OFDM-сигнала (интервалов ортогональности); t_l – истинное положение временной границы интервала ортогональности OFDM-сигнала; t'_l – оценка временной границы, полученная на основе гармонического вейвлет-преобразования.

Рассмотрим зашумленный OFDM-сигнал, содержащий 4 интервала ортогональности длиной 1024 отсчета каждый (общая длительность сигнала 4096 отсчетов) и 4 дискретные гармоники на каждом интервале. Длина временной реализации сигнала составляет 16 384 отсчета (длина выбрана равной степени 2 для более точного применения гармонического вейвлет-преобразования) при периоде дискретизации 0.0001 с. Шаг по частоте $\Delta\omega$ составляет 15.3436 рад/с. Среднеквадратическое отклонение шума равно 0.1. Параметры OFDM-сигнала, распределенные по интервалам ортогональности, приведены в табл. 2.

Табл. 2. Параметры OFDM-сигнала

Tab. 2. OFDM signal parameters

Номер гармоники	Амплитуда		Частота		Начальная фаза	
	Обозначение	Значение, В	Обозначение	Значение, рад/с	Обозначение	Значение, рад
Первый интервал ортогональности						
1	a_{11}	0.8	ω_1	$2\Delta\omega$	φ_{11}	$\pi/7$
2	a_{12}	0.6	ω_2	$5\Delta\omega$	φ_{12}	$\pi/3$
3	a_{13}	0.4	ω_3	$4\Delta\omega$	φ_{13}	$\pi/4$
4	a_{14}	0.8	ω_4	$3\Delta\omega$	φ_{14}	$\pi/9$
Второй интервал ортогональности						
1	a_{21}	1.7	ω_1	$2\Delta\omega$	φ_{21}	$\pi/2$
2	a_{22}	0.4	ω_2	$5\Delta\omega$	φ_{22}	$\pi/9$
3	a_{23}	-0.8	ω_3	$4\Delta\omega$	φ_{23}	$\pi/12$
4	a_{24}	0.15	ω_4	$3\Delta\omega$	φ_{24}	$\pi/3.5$
Третий интервал ортогональности						
1	a_{31}	0.9	ω_1	$2\Delta\omega$	φ_{31}	$3\pi/5$
2	a_{32}	-1.8	ω_2	$5\Delta\omega$	φ_{32}	$\pi/2$
3	a_{33}	-0.1	ω_3	$4\Delta\omega$	φ_{33}	$8\pi/7$
4	a_{34}	2.3	ω_4	$3\Delta\omega$	φ_{34}	$\pi/1.5$
Четвертый интервал ортогональности						
1	a_{41}	0.25	ω_1	$2\Delta\omega$	φ_{41}	$-6\pi/5$
2	a_{42}	-0.15	ω_2	$5\Delta\omega$	φ_{42}	$-\pi/4$
3	a_{43}	2.36	ω_3	$4\Delta\omega$	φ_{43}	$2\pi/3$
4	a_{44}	-1.12	ω_4	$3\Delta\omega$	φ_{44}	0.2π

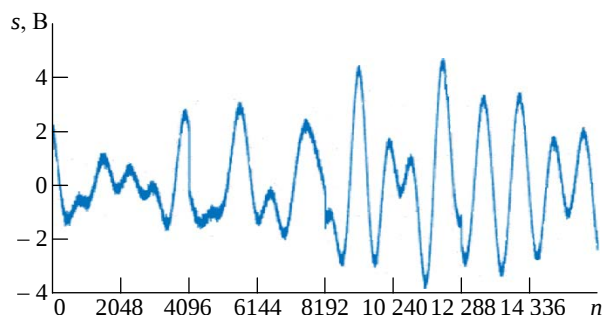


Рис. 3. Временная реализация зашумленного OFDM-сигнала с четырьмя интервалами ортогональности
Fig. 3. Temporal realization of denoised OFDM signal with four orthogonality intervals

На рис. 3 показана временная реализация OFDM-сигнала с указанными параметрами. Его гармоническое вейвлет-разложение $\text{Re} a_j(p)$ представлено на рис. 4.

На рис. 4 количество вейвлет-коэффициентов различается, что объясняется схемой вычисления гармонического вейвлет-преобразования и интерпретацией преобразования как двоичного банка фильтров [22]. На самом "тонком" уровне вейвлет-разложения число вейвлет-коэффициентов равно 2^{n-2} , где $n = \log_2 N$. Для рассматриваемого сигнала $N = 16384$, а число вейвлет-коэффициентов

на самом "тонком" уровне составляет 4096 и при переходе к каждому следующему уровню уменьшается в 2 раза. В соответствии с анализом самого "тонкого" уровня разложения гармонического вейвлет-преобразования ($j = 14$) (рис. 4) установлены границы интервалов ортогональности, что обеспечило в рассматриваемом эксперименте максимально возможную точность временной синхронизации.

На рис. 5 показана зависимость дисперсии ошибки установления временного синхронизма от отношения сигнал/шум при двух различных длинах окна анализа OFDM-сигнала M_1 и $M_2 > M_1$. Из представленных зависимостей следует, что с увеличением окна анализа удастся добиться более точного временного синхронизма (дисперсия определения временных границ меньше). Однако временной синхронизм при этом устанавливается дольше.

Установление временного синхронизма в условиях шума. Представим совокупность временных границ интервалов ортогональности в виде массива $(t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_L)$. Для установления временного синхронизма на приемной

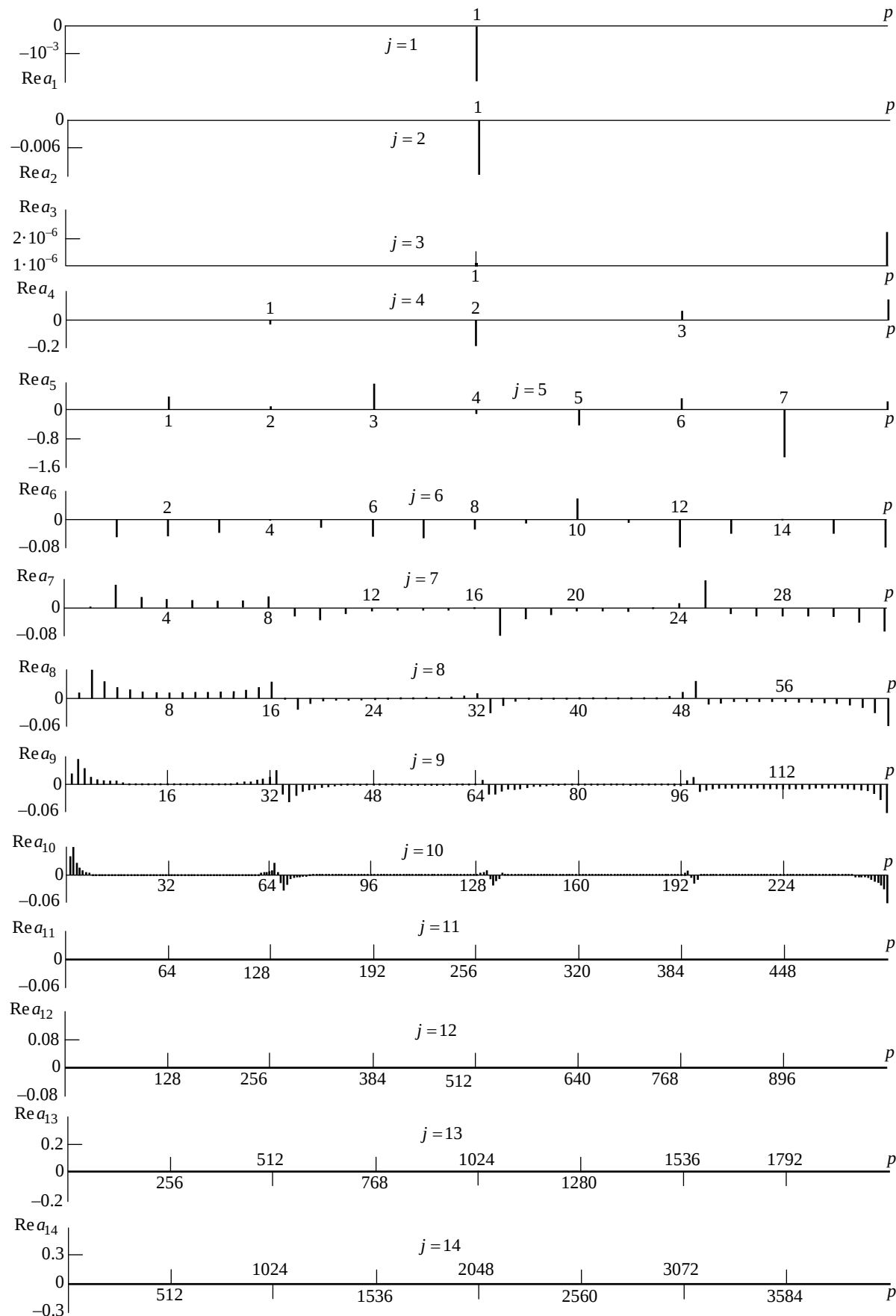


Рис. 4. Вейвлет-разложение OFDM-сигнала с использованием гармонического вейвлет-преобразования

Fig. 4. Wavelet decomposition of OFDM signal using harmonic wavelet transform

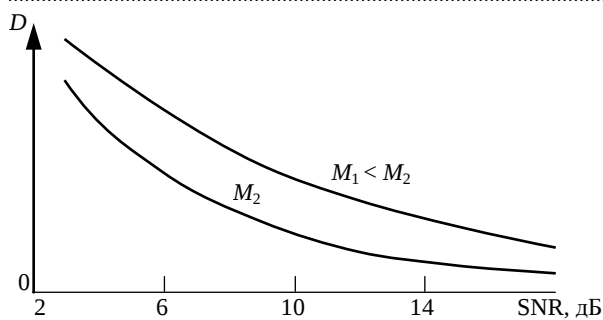


Рис. 5. Зависимость дисперсии ошибки установления временной синхронизации от отношения сигнал/шум при разных длинах окна анализа

Fig. 5. Error variance of establishing temporal synchronization versus signal-to-noise ratio for different window lengths

стороне необходимо определить значения элементов массива $\{t_l\}_{l=1}^L$.

Введем отображение

$$t_l \rightarrow e^{i(2\pi/T)t_l} = \dot{Z}_l,$$

позволяющее отобразить результат синхронизма величиной Z на комплексной плоскости.

При отсутствии шума, установленном временном синхронизме в исследуемом OFDM-сигнале и моменте первого после начала анализа изменения параметров модели сигнала в точке смены ортогональности массив значений временных границ интервалов ортогональности определяется значениями $t_l = lT$. В результате

$$e^{i(2\pi/T)t_l} \Big|_{\{t_l=lT\}} = e^{i(2\pi/T)lT} = e^{i2\pi l} = 1,$$

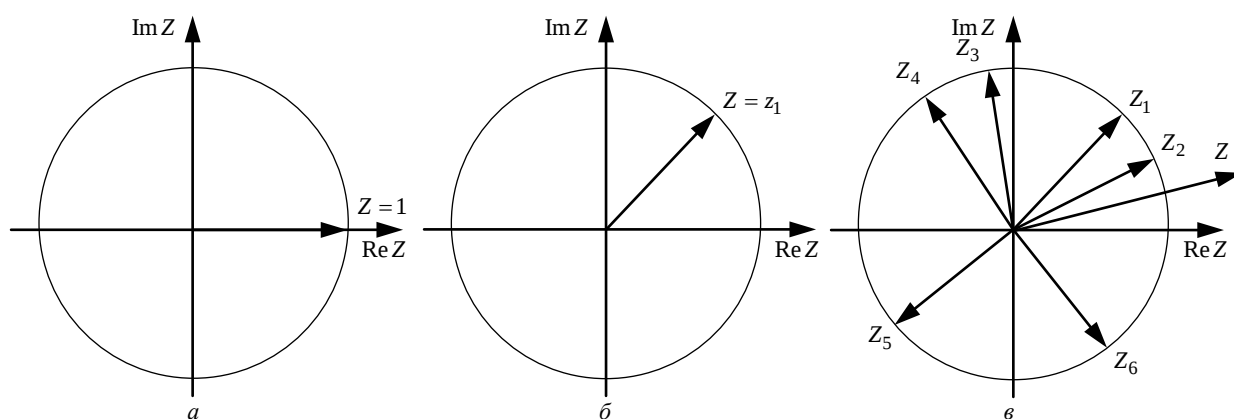


Рис. 6. Векторная диаграмма комплексной величины Z для OFDM-сигнала:

a – при отсутствии шума и совпадении момента первого изменения параметров модели OFDM-сигнала после начала анализа с моментом смены интервала ортогональности;

$б$ – при отсутствии шума и начале наблюдения в произвольный момент; $в$ – при наличии шума

Fig. 6. Vector diagram for complex value Z for OFDM signal:

a – in the absence of noise and the coincidence of the first change of model parameters of the OFDM signal after the analysis onset with the moment of orthogonality interval change;

$б$ – in the absence of noise and the observation start at an arbitrary moment; $в$ – with the presence of noise

т. е. на комплексной плоскости имеем вектор в пределах единичной окружности, направленный по положительной оси (рис. 6, a).

При первом изменении параметров модели OFDM-сигнала после начала анализа в момент времени $t = t_0$, не совпадающем со сменой интервала ортогональности, имеем отображение

$$\begin{aligned} e^{i(2\pi/T)t_l} \Big|_{\{t_l=t_0+lT\}} &= e^{i(2\pi/T)(lT+t_0)} = \\ &= e^{i2\pi l} e^{i(2\pi/T)t_0} = e^{i(2\pi/T)t_0} = z_1. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае результат также инвариантен относительно l , имеет единичную амплитуду (т. е. расположен на единичной окружности), однако фаза $\arg \dot{Z}$ будет не нулевой, а равной $(2\pi/T)t_0$ (рис. 6, $б$) и представит угол между вектором $\dot{Z}$ и осью абсцисс.

В реальных условиях в сигнале может присутствовать шум (например, шум канала передачи), в связи с чем оценки временных границ могут не полностью совпадать с их действительными положениями, т. е. не быть строго кратными длительности интервала ортогональности. Кроме того, временные границы смещены на величину t_0 – начало момента наблюдения. В результате отображение

$$t_l \rightarrow e^{i(2\pi/T)t_l} = \{\dot{Z}_l\} \quad (3)$$

представляет собой комплексный ансамбль.

При наличии шума в OFDM-сигнале оценки временных границ $\hat{t}_l$ удовлетворяют соотношению

$$\hat{t}_l = t_l + \varepsilon_l, \quad (4)$$

где

$$t_l = lT + t_0 \quad (5)$$

– истинные положения временных границ; ε_l – ошибка определения временной границы в силу наличия шума в исходном сигнале.

Далее вычисляется статистика $\dot{Z}_l$ по формуле (3):

$$e^{i(2\pi/T)\hat{t}_l} = \dot{Z}_l. \quad (6)$$

После этого суммируем значения статистики $\dot{Z}_l$ и получаем:

$$\dot{Z} = \sum_{l=1}^N \dot{Z}_l. \quad (7)$$

С учетом соотношений (4) и (5) выражение (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)\hat{t}_l} = \sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)(t_l + \varepsilon_l)} = \\ &= \sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)(t_0 + lT + \varepsilon_l)} = \\ &= \sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)t_0} e^{i2\pi l} e^{i(2\pi/T)\varepsilon_l} = \\ &= e^{i(2\pi/T)t_0} \sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)\varepsilon_l}. \end{aligned}$$

В выражении присутствует постоянный множитель $e^{i(2\pi/T)t_0}$ и множитель $\sum_{l=1}^L e^{i(2\pi/T)\varepsilon_l}$,

представляющий собой сумму комплексных экспонент с величинами ошибок ε_l в показателе степени. Из (6) получим соотношение

$$t_0 = \frac{\arg \dot{Z}}{2\pi} T,$$

определяющее момент первого изменения параметров модели OFDM-сигнала после начала анализа.

Векторная диаграмма, соответствующая OFDM-сигналу с шумом, представлена на рис. 6, в. На диаграмме показаны векторы $\dot{Z}_l$, соответствующие моментам времени $\hat{t}_l$, и результирующий комплексный вектор $\dot{Z}$, полученный суммой векторов $\dot{Z}_l$.

Заключение. Гармоническое вейвлет-преобразование эффективно при анализе и обработке OFDM-сигнала как при наличии, так и при отсутствии шума. Оно позволяет с максимальной возможной точностью определять границы интервалов ортогональности OFDM-сигналов. На основе анализа комплексных векторов, соответствующих границам интервалов ортогональности, удастся определить момент первого изменения параметров модели OFDM-сигнала после начала анализа. В статье также получена зависимость дисперсии ошибки установления временного синхронизма от длины окна анализа, показывающая, что с увеличением окна удастся добиться более точного синхронизма (при этом временной синхронизм устанавливается дольше).

Список литературы

1. Технология OFDM: учеб. пособие для вузов / М. Г. Бакулин, В. Б. Крейнделин, А. М. Шлома, А. П. Шумов. М.: Горячая линия–Телеком, 2021. 360 с.
2. Егоров В. В., Тимофеев А. Е. Установление частотно-временной синхронизации в многочастотных КВ-системах передачи данных // Электросвязь. 2013. № 7. С. 41–44.
3. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации: учеб. пособие для вузов / Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых, Ю. А. Сидоркина и др. М.: Горячая линия–Телеком, 2011. 278 с.
4. Прохис Дж. Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

5. Егоров В. В., Клионский Д. М. Применение гармонического вейвлет-преобразования при обработке OFDM-сигналов в нестационарном радиоканале // Цифровая обработка сигналов. 2024. № 2. С. 57–63.
6. Ifeachor E. C., Jervis B. W. Digital signal processing: a practical approach. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004. 960 p.
7. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Matlab: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 816 с.
8. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций. 2-е изд. / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.

9. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 3-е изд.: М.: Техносфера, 2012. 1048 с.
10. Гоулд Б., Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
11. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А. И. Солонина, Д. М. Клионский, Т. В. Меркучева, С. Н. Перов. СПб.: БХВ-Петербург, 2013. 512 с.
12. Солонина А. И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2018. 560 с.
13. Mallat S. G. A wavelet tour of signal processing. Heidelberg: Academic Press, 1998. 577 p.
14. Смоленцев Н. К. Вейвлет-анализ в Matlab. 3-е изд. М.: ДМК Пресс, 2010. 448 с.
15. Daubechies I. Ten lectures of wavelets. Cham: Springer-Verlag, 1992. 341 p.
16. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
17. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / пер. с англ. М.: Бином. Лаб. знаний, 2007. 487 с.
18. Percival D. B., Walden A. T. Wavelet methods for time series analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 569 p.
19. Newland D. E. Harmonic wavelet analysis // Proc. of the Royal society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences). 1993. Vol. 443, № 1917. P. 203–225. doi: 10.1098/rspa.1993.0140
20. Newland D. E. An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis. 3rd ed. New York: Prentice Hall, 1996. 503 p.
21. Newland D. E. Harmonic and musical wavelets // Proc. of the royal society of London (Mathematical and Physical Sciences). 1994. Vol. 444, № 1922. P. 605–620. doi: 10.1098/rspa.1994.0042
22. Орешко Н. И., Геппенер В. В., Клионский Д. М. Применение гармонических вейвлетов в задачах обработки осциллирующих сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 2. С. 6–14.
23. Орешко Н. И., Клионский Д. М. Характеристики реальных вейвлет-фильтров применительно к гармоническому вейвлет-преобразованию // Цифровая обработка сигналов и ее применения (DSPA-2013): тез. докл. 15-й Междунар. конф., Москва, 27–29 марта 2013. М., 2013. С. 302–306.

Информация об авторах

Егоров Владимир Викторович – доктор технических наук (2017), старший научный сотрудник (1992), заведующий кафедрой радиостроения и средств связи Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Автор более 150 научных публикаций и 60 изобретений. Сфера научных интересов – статистическая теория связи; цифровая обработка сигналов; математическое моделирование. Адрес: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, Санкт-Петербург, 190000, Россия
E-mail: egorovvirm@mail.ru

Клионский Дмитрий Михайлович – кандидат технических наук (2013), доцент (2017), доцент кафедры информационных систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 150 научных публикаций. Сфера научных интересов – цифровая обработка сигналов; обработка и анализ вибрационных сигналов; математическое и компьютерное моделирование; моделирование в MATLAB; численные методы; математическая статистика. Адрес: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5 Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия
E-mail: klio2003@list.ru
<https://orcid.org/0000-0002-1203-297X>

References

1. Bakulin M. G., Kreindelyin V. B., Shloma A. M., Shumov A. P. *Technologia OFDM* [OFDM Technology]. Moscow, *Goryachaya Linia Telecom*, 2021, 360 p. (In Russ.)
2. Egorov V. V., Timofeev A. E. Establishing Time-frequency Synchronization in Multi-frequency Short-wave Data Transmission Systems. *Electrical Communications*. 2013, no. 7, pp. 41–44. (In Russ.)
3. Shakhrtarin B. I., Sizykh V. V., Sidorkina Yu. A., Andrianov I. M., Kalashnikov K. S. *Synchronizatsia v radiosvyazi i radionavigatsii* [Synchronization in Radio Communications and Radio Navigation]. Moscow, *Goryachaya Linia Telecom*, 2011, 278 p. (In Russ.)
4. Proakis J. *Tsifrovaya svyaz* [Digital Communications]. Moscow, *Radio i Svyaz*, 2000, 800 p. (In Russ.)
5. Egorov V. V., Klionskiy D. M. Application of the Harmonic Wavelet-Transform for OFDM Signal Processing in a Non-Stationary Radio Channel. *Digital Signal Processing*. 2024, no. 2, pp. 57–63. (In Russ.)
6. Ifeachor E. C., Jervis B. W. *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. 2nd ed. New Jersey, Prentice Hall, 2004, 960 p.
7. Solonina A. I., Arbuzov S. M. *Tsifrovaya obrabotka signalov. Modelirovanie v Matlab* [Digital Signal Processing. Simulation in MATLAB]. St Petersburg, *BHV-Peterburg*, 2008, 816 p. (In Russ.)
8. Solonina A. I., Ulakhovich D. A., Arbuzov S. M., Solov'eva E. B. *Osnovi tsifrovoy obrabotki signalov : kurs lektsiy* [Fundamentals of Digital Signal Processing: a Lecture Course]. 2nd ed. St Petersburg, *BHV-Peterburg*, 2005, 768 p. (In Russ.)
9. Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Digital Signal Processing*. 1st ed. London, Pearson, 1975, 585 p.

10. Rabiner L. R., Gold B. Theory and Application of Digital Signal Processing. 1st ed. New Jersey, Prentice Hall, 1975, 762 p.
11. Solonina A. I., Klionskiy D. M., Merkuicheva T. V., Perov S. N. Tsifrovaya obrabotka signalov i MATLAB [Digital Signal Processing and MATLAB]. St Petersburg, BHV-Peterburg, 2013, 512 p. (In Russ.)
12. Solonina A. I. Tsifrovaya obrabotka signalov v zerkale MATLAB [Digital Signal Processing in the Mirror of MATLAB]. St Petersburg, BHV-Peterburg, 2018, 560 p. (In Russ.)
13. Mallat S. G. A Wavelet Tour of Signal Processing. Heidelberg, Academic Press, 1998, 577 p.
14. Smolentsev N. K. Vawelet analiz v Matlab [Wavelet Analysis in MATLAB]. 3rd ed. Moscow, DMK, 2010, 448 p. (In Russ.)
15. Daubechies I. Ten Lectures Of Wavelets. Cham, Springer-Verlag, 1992, 341 p.
16. Chuyi K. Vvedenie v veivleti [Introduction to Wavelets]. Moscow, Mir, 2001, 412 p. (In Russ.)
17. Freiser M. Vvedenie v waveleti v svete lineinoi algebr [Introduction to Wavelets in the Light of Linear Algebra]. Moscow, Laboratoria Znaniy, 2007, 487 p. (In Russ.)
18. Percival D. B., Walden A. T. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 2006, 569 p.
19. Newland D. E. Harmonic Wavelet Analysis. Proc. of the Royal society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences). 1993, vol. 443, no. 1917, pp. 203–225. doi: 10.1098/rspa.1993.0140
20. Newland D. E. An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. 3rd ed. New York, Prentice Hall, 1996, 503 p.
21. Newland D. E. Harmonic and Musical Wavelets. Proc. of the royal society of London (Mathematical and Physical Sciences). 1994, vol. 444, no. 1922, pp. 605–620. doi: 10.1098/rspa.1994.0042
22. Oreshko N. I., Geppener V. V., Klionskiy D. M. *Primenenie garmonicheskikh waveletov v zadachah obrabotki oscilliruuchih signalov* [Application of Harmonic Wavelets to Oscillating Signal Processing Problems]. Digital Signal Processing. 2012, no. 2, pp. 6–14. (In Russ.)
23. Oreshko N. I., Klionskiy D. M. *Characteristiki realnih wavelet-filtrov primenitelno k harmonicheskomu wavelet-preobrazovaniyu* [Characteristics of Real Wavelet-filters Relative to Harmonic Wavelet Transform], DSPA'2013: 15th Intern. Conf., Moscow, 27–29 March 2013, pp. 302–306. (In Russ.)

Information about the authors

Vladimir V. Egorov, Dr Sci. (Eng.) (2017), Senior Researcher (1992), Head of the Department of Radio Engineering and Communication Means of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation. The author of more than 150 scientific publications and 60 inventions. Area of expertise: statistical communications theory; digital signal processing; mathematical modelling.
Address: Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67 A, Bolshaya Morskaya St., St Petersburg 190000, Russia
E-mail: egorovvirm@mail.ru

Dmitry M. Klionskiy, Cand. Sci. (Eng.) (2013), Associate Professor (2017) Associate Professor of the Department of Information Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University. The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: digital signal processing; vibrational signal processing and vibrational signal analysis; mathematical and computer modeling; MATLAB modeling; numerical techniques; mathematical statistics.
Address: Saint Petersburg Electrotechnical University, 5 F, Professor Popov St., St Petersburg 197022, Russia
E-mail: klio2003@list.ru
<https://orcid.org/0000-0002-1203-297X>
