

Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов

УДК 621.391.833.64

Научная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2024-27-2-37-48>

Восстановление спектра полигармонического сигнала при медленных флуктуациях периода дискретизации

А. А. Монаков✉

Институт радиотехники и телекоммуникационных технологий,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

✉a_monakov@mail.ru

Аннотация

Введение. Полигармонические сигналы, спектр которых имеет линейчатый вид, часто встречаются в практических задачах. Примерами являются сигналы датчиков контроля вращающихся элементов механических систем, сигналы мониторов сердечных сокращений, сигналы радиотехнических систем с изменяющимся периодом повторения. Вследствие нестабильности частот гармоник в составе сигнала или флуктуаций периода дискретизации спектральные линии "расплываются". Эти искажения можно рассматривать как следствие изменений локального временного масштаба обрабатываемого сигнала. Такая трактовка позволяет предложить для восстановления спектра сигнала масштабно-инвариантные преобразования. Известные способы восстановления спектра сигнала, моменты взятия отсчетов которого априорно не известны, основаны на предварительном восстановлении самого сигнала и последующей оценке его спектра. Алгоритмы восстановления сигнала, заданного на временной сетке с неизвестными значениями координат узлов, характеризуются большой вычислительной сложностью, поскольку являются итерационными и используют методы оптимизационного поиска.

Цель работы. Синтезировать безытерационный алгоритм восстановления спектра полигармонического дискретного сигнала в предположении о медленном характере изменений периода дискретизации.

Материалы и методы. Для решения поставленной задачи в статье используется дискретный вариант преобразования Ламперти. Качество полученного алгоритма оценивается методом математического моделирования с применением тестового сигнала, известного из литературных источников.

Результаты. Математическое моделирование предлагаемого алгоритма доказало его работоспособность. Линейчатая структура спектра тестового сигнала, которая была искажена медленными изменениями периода дискретизации с амплитудой 20 % от среднего значения периода дискретизации, была восстановлена при ошибках в оценке частот и мощностей гармоник, сравнимых с соответствующими значениями, полученными из оценки спектра сигнала при его равномерной дискретизации. Максимальная ошибка оценки периода дискретизации составила 5 % от его среднего значения.

Заключение. Предложен новый безытерационный алгоритм восстановления линейчатого спектра дискретного полигармонического сигнала, использующий масштабно-инвариантное преобразование Ламперти. Синтезированный алгоритм можно использовать в простой итерационной процедуре для оценки изменений периода дискретизации.

Ключевые слова: полигармонический сигнал, линейчатый спектр, нестабильность периода дискретизации, преобразование Ламперти

Для цитирования: Монаков А. А. Восстановление спектра полигармонического сигнала при медленных флуктуациях периода дискретизации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2024. Т. 27, № 2. С. 37–48. doi: 10.32603/1993-8985-2024-27-2-37-48

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 18.01.2024; принята к публикации после рецензирования 21.02.2024; опубликована онлайн 29.04.2024



Reconstructing the Spectrum of a Polyharmonic Signal under Slow Fluctuations in the Sampling Period

Andrey A. Monakov✉

Institute of Radio Technique and Telecommunication Technologies,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St Petersburg, Russia

✉a_monakov@mail.ru

Abstract

Introduction. Polyharmonic signals with a line spectrum are often encountered in practical problems. Among the examples are signals from sensors monitoring rotating elements of mechanical systems, heart rate signals, or signals of radio systems with pulse-to-pulse repetition-period staggering. Due to instable frequencies of the signal harmonics or due to fluctuations in the sampling period, the line spectrum is disrupted. These distortions can be considered as a consequence of changes in the local time scale of the processed signal. This interpretation makes it possible to use scale-invariant transforms to reconstruct the signal spectrum. Methods for reconstructing the spectrum of a signal, the sampling moments of which are unknown a priori, are based on a preliminary reconstruction of the signal and subsequent estimation of its spectrum. Existing algorithms for reconstructing a signal sampled on an uneven time grid with unknown nodes are characterized by a high computational complexity due to their iterative nature and reliance on optimization search methods.

Aim. To synthesize a non-iteration algorithm for reconstructing the spectrum of a polyharmonic discrete signal under the assumption of slow changes in the sampling period.

Materials and methods. To solve the problem, the digital Lamperti transform is implemented. The quality assessment of the proposed algorithm is realized via computer simulation using a test signal known from the literature on the digital spectral analysis.

Results. The conducted computer simulation of the proposed algorithm has proven its feasibility. The line structure of the test signal spectrum, which was distorted by slow changes in the sampling period with an amplitude of 20 % of the mean value of the sampling period, was completely restored. Errors of the frequency and power estimates of individual signal harmonics exhibit values comparable with those derived from the spectrum estimate when the signal is evenly spaced. The error in estimating the sampling period comprised 5 % of its mean value.

Conclusion. A new iteration free algorithm for reconstructing the line spectrum of a discrete polyharmonic signal is proposed. The algorithm uses the scale invariant Lamperti transform. The synthesized algorithm can be used in a simple iterative procedure to estimate changes in the sampling period.

Keywords: polyharmonic signal, line spectrum, uneven sampling, Lamperti transform

For citation: Monakov A. A. Reconstructing the Spectrum of a Polyharmonic Signal under Slow Fluctuations in the Sampling Period. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2024, vol. 27, no. 2, pp. 37–48. doi: 10.32603/1993-8985-2024-27-2-37-48

Conflict of interest. The author declares no conflicts of interest.

Submitted 18.01.2024; accepted 21.02.2024; published online 29.04.2024

Введение. Во многих научных и технических дисциплинах встречается задача восстановления спектра сигнала, когда период его дискретизации не является постоянным на интервале анализа. Примером может служить задача обнаружения и измерения параметров деформированных вращающихся элементов конструкции механической системы при изменениях действующей на них нагрузки, следствием которых являются ускорения и замедления скорости

вращения элементов. В медицине решение подобной задачи необходимо для исследования изменений ритма сердечных сокращений. В радиолокации и радионавигации часто встречаются ситуации, когда частота повторения излучаемых импульсных сигналов преднамеренно изменяется во времени.

При изменении периода дискретизации сигнала в зависимости от наличия или отсутствия априорной информации о моментах вре-

мени взятия отсчетов восстановление спектра сигнала осуществляется:

- при точном априорном знании моментов времени взятия отсчетов – либо с привлечением методов спектрального анализа, которые не предполагают равномерное распределение отсчетов сигнала во времени, либо посредством восстановления самого сигнала на равномерной сетке отсчетов с использованием методов интерполяции и последующей оценки спектра известными методами спектрального анализа;

- при отсутствии априорной информации о моментах времени взятия отсчетов – поиском такого положения отсчетов, которое соответствует минимуму суммарной мощности спектральных компонент вне занимаемой сигналом полосы частот, с последующим восстановлением самого сигнала на равномерной сетке и оценкой спектра известными методами спектрального анализа.

Для первого случая задача спектрального оценивания сигнала достаточно исследована и существует большое количество эффективных алгоритмов ее решения [1–3]. Значительно более сложной задачей является восстановление сигнала, когда нет априорных сведений о моментах взятия сигнальных отсчетов. Впервые восстановлению сигнала в указанных условиях была посвящена работа [4], в которой задача рассматривалась как проблема комбинаторной оптимизации. Основной идеей, использованной в этой работе при решении, был поиск такого упорядоченного расположения во времени отсчетов сигнала, которое гарантирует ограниченность полосы частот, занимаемой восстанавливаемым сигналом. В связи с высокой вычислительной сложностью задачи авторы посвятили свою работу поиску наиболее эффективного метода получения оптимального решения. Аналогичная задача также решалась в [5, 6], используя метод оптимизационного поиска. Благодаря допущению об априорном знании полосы частот, которую занимает непрерывный сигнал, а также принятию в качестве целевой функции энергии восстанавливаемого сигнала, которая приходится на свободную от сигнала область частот, автор значительно уменьшил вычислительную сложность решения, применив для поиска метод гради-

ентного спуска. При этом автор работ указал на неоднозначность решения данной задачи. В [7] было строго доказано, что рассматриваемая задача восстановления действительно является плохо обусловленной и допускает неоднозначность решения. Поэтому ее однозначное решение возможно только при наложении дополнительных ограничений. Дальнейшее развитие исследования по восстановлению сигнала при отсутствии информации о положении моментов времени взятия отсчетов получили в [8–11], в которых авторы предложили новые алгоритмы восстановления сигнала и исследовали их свойства.

Настоящая статья посвящена описанию прямого алгоритма восстановления спектра полигармонического сигнала, минуя стадию восстановления самого сигнала, при медленных флуктуациях периода дискретизации. Именно малая скорость изменения периода дискретизации по сравнению со скоростью изменения самого сигнала является ключевым предположением, благодаря которому удалось решить поставленную задачу. В основе предлагаемого алгоритма лежит частный случай инструмента анализа случайных самоподобных процессов (*англ.* self-similar processes) – преобразования Ламперти [12, 13], который принадлежит к группе преобразований, инвариантных к изменению масштаба сигнала [14], и используется для исследований масштабно-стационарных процессов (*англ.* scale stationary processes) [15]. Реализация алгоритма не требует многократных итераций и применения оптимизационных методов.

Алгоритм восстановления спектра. Пусть на интервале анализа $[0, T_a]$ в результате дискретизации аналогового сигнала $\xi(t)$ получена выборка:

$$\xi[n] = \xi(t_n), \quad (1)$$

где $n = 0, \dots, N - 1$ – дискретное время; N – размер полученной выборки; $t_n = \sum_{k=1}^n T[k]$ – момент взятия n -го отсчета сигнала; $T[k]$ – период дискретизации в k -й момент дискретного времени. Будем считать, что период дискретизации меняется на интервале анализа

настолько медленно, что при разбиении сигнальной выборки на M сегментов, каждый из которых содержит P отсчетов (выбор этого параметра рассмотрен далее) и используется для вычисления оценки спектральной плотности мощности (СПМ) сигнала $\xi(t)$ с последующим усреднением по методу Бартлетта [16, 17], можно считать период дискретизации $T[k]$ примерно постоянным и равным

$$T_m = \frac{\tau_m - \tau_{m-1}}{P} = \frac{1}{P} \sum_{k=(m-1)P}^{mP-1} T[k], \quad (2)$$

где $m=1, \dots, M$; $\tau_{m-1} = \sum_{k=1}^{(m-1)P} T[k]$ – левая

граница m -го сегмента, на который приходится P отсчетов; $\tau_{m-1} \leq t_k < \tau_m$. Таким образом, на основании (1) и (2) приходим к следующей модели сигнала:

$$\xi_m[k] = \xi(\tau_{m-1} + kT_m), \quad (3)$$

где $k=0, \dots, P-1$; $m=1, \dots, M$.

Эта модель позволяет рассматривать аналоговый сигнал $\xi(t)$ на m -м сегменте как результат масштабного преобразования сигнала:

$$\xi_m(\tau) = \xi(\tau_{m-1} + \mu_m \tau),$$

где $0 \leq \tau < (\tau_m - \tau_{m-1})$; $m=1, \dots, M$; $\mu_m = T_m/T_1$ – масштаб сигнала на m -м сегменте.

Оценку СПМ сигнала (3) на m -м сегменте вычислим методом периодограмм [16, 17]:

$$\begin{aligned} \hat{S}_m(\omega) &= \\ &= \frac{1}{\tau_m - \tau_{m-1}} \left| \int_0^{\tau_m - \tau_{m-1}} \xi_m(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\tau_m - \tau_{m-1}} \times \\ &\times \left| \int_{\tau_{m-1}}^{\mu_m(\tau_m - \tau_{m-1}) + \tau_{m-1}} \xi(\tau) \exp \left[-i \frac{\omega}{\mu_m} (\tau - \tau_{m-1}) \right] \frac{d\tau}{\mu_m} \right|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_m^2} \frac{[\mu_m(\tau_m - \tau_{m-1}) + \tau_{m-1}] - \tau_{m-1}}{\tau_m - \tau_{m-1}} \times \\ &\times \frac{1}{[\mu_m(\tau_m - \tau_{m-1}) + \tau_{m-1}] - \tau_{m-1}} \times \\ &\times \left| \int_{\tau_{m-1}}^{\mu_m(\tau_m - \tau_{m-1}) + \tau_{m-1}} \xi(\tau) \exp \left[-i \frac{\omega\tau}{\mu_m} \right] d\tau \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{\mu_m} S \left(\frac{\omega}{\mu_m} \right); \quad m=1, \dots, M, \end{aligned} \quad (4)$$

где $S(\omega)$ – СПМ сигнала $\xi(t)$. При выводах в (4) было учтено, что периодограммная оценка СПМ случайного процесса равна квадрату модуля его спектра, деленному на длину интервала наблюдения. Длина каждого сегмента должна быть больше интервала корреляции случайного процесса $\xi(t)$, чтобы оценки СПМ $\hat{S}_m(\omega)$, $m=1, \dots, M$ были качественными [16, 17].

Для нахождения масштабов μ_m , $m=1, \dots, M$ на каждом сегменте воспользуемся экспоненциальной заменой переменной в (4), которая используется при анализе масштабно-стационарных случайных процессов [15] и является частным случаем преобразования Ламперти (ПЛ) [12–14] – инструмента исследования самоподобных случайных процессов [12]:

$$\omega = \Delta\omega e^x, \quad \omega \geq 0, \quad (5)$$

где $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$; $\Delta f = f_s/P$ – разрешение по частоте в алгоритме спектрального оценивания при частоте дискретизации f_s и размере временного окна анализа P . Однако непосредственная замена (5) не возможна, поскольку частота ω в (4) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому ПЛ необходимо осуществить отдельно для положительной $\hat{S}_m^+(\omega) = \{\hat{S}_m(\omega), \omega \geq 0\}$ и отрицательной $\hat{S}_m^-(\omega) = \{\hat{S}_m(-\omega), \omega \geq 0\}$ ветвей оценки $\hat{S}_m(\omega)$. Численный алгоритм преобразования Ламперти рассмотрен в Приложении.

Тогда, осуществив преобразование (5) и введя функции $G_m^\pm(x) = S_m^\pm(\Delta\omega e^x)$, $m=1, \dots, M$, получим

$$\begin{aligned} G_m^\pm(x) &= \frac{1}{\mu_m} S\left(\pm \frac{\Delta\omega}{\mu_m} e^x\right) = \\ &= e^{-x_m} S[\pm \Delta\omega e^{(x-x_m)}] = \\ &= e^{-x_m} G^\pm(x-x_m), \quad m=1, \dots, M, \end{aligned} \quad (6)$$

где $G^\pm(x) = S(\pm \Delta\omega e^x)$ – образ по Ламперти положительной и отрицательной ветвей СПМ сигнала $S(\omega)$; $x_m = \ln \mu_m$; $m=1, \dots, M$. Смысл сделанных преобразований состоит в использовании основного свойства ПЛ: образ масштабированного оригинала равен сдвинутому образу, причем размер сдвига определяется логарифмом масштаба. Таким образом, задача по оценке масштабов μ_m , $m=1, \dots, M$ сводится при использовании ПЛ к задаче измерения сдвигов образов $G_m^\pm(x)$, $m=1, \dots, M$. Эта задача в статистической обработке сигналов известна давно, и оптимальным методом ее решения является нахождение взаимно корреляционных функций (ВКФ) образов $G_m^\pm(x)$, $m=1, \dots, M$:

$$B_m^\pm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_m^\pm(x) G_1^\pm(x-y) dx. \quad (7)$$

В силу свойств ВКФ на основании (6) максимумы ВКФ (7) соответствуют точкам

$$y_m^\pm = x_m^\pm - x_1^\pm; \quad m=2, \dots, M. \quad (8)$$

Оценки взаимных сдвигов $y_m^\pm$, $m=2, \dots, M$ получаются в результате обработки одного и того же сигнала, поэтому принципиально должно выполняться равенство $y_m^+ = y_m^-$, $m=2, \dots, M$. Однако вследствие наличия шума в сигнале $\xi(t)$ это равенство может быть нарушено для некоторых сегментов. В связи с этим целесообразно объединить оценки y_m^+ и y_m^- , $m=2, \dots, M$ следующим образом:

$$y_m = \begin{cases} y_m^+, \hat{P}_m^+ \geq \hat{P}_m^- \\ y_m^-, \hat{P}_m^+ < \hat{P}_m^- \end{cases}, \quad m=2, \dots, M, \quad (9)$$

где $\hat{P}_m^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{S}_m^\pm(\omega) d\omega$ – оценки средней

мощности сигнала в области положительных и отрицательных частот. Оценив таким образом взаимные сдвиги (8), положив $x_1^\pm = 0$ и вычислив в соответствии с (9) y_m , $m=2, \dots, M$, оценка СПМ процесса $\xi(t)$ как функция переменной x на основании (6) может быть определена следующим образом:

$$G^\pm(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[y_m] G_m^\pm(x+y_m) \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{S}(\pm \Delta\omega e^x) &= \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[y_m] \hat{S}_m(\pm \Delta\omega \exp[x+y_m]). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) являются основными для восстановления спектра сигнала при медленных изменениях периода дискретизации.

Рассмотренный алгоритм позволяет не только восстановить СПМ сигнала, но и достаточно просто оценить период дискретизации на каждом сегменте. Действительно, учитывая связь масштаба μ_m с периодом дискретизации T_m на m -м сегменте, несложно получить следующее уравнение для его оценки:

$$\hat{T}_m = \hat{T}_1 \exp[y_m], \quad m=1, \dots, M. \quad (12)$$

Данную оценку можно уточнить, используя итерационный процесс. Пусть $\hat{\mathbf{T}}_M^{(j)} = \{\hat{T}_m, m=1, \dots, M\}$, $j=1$ – вектор оценок периодов дискретизации (12); $\hat{\Xi}^{(j)} = \{\hat{\xi}[n], n=0, \dots, N-1\}$, $j=1$ – вектор отсчетов сигнала; $\bar{\mathbf{T}}_M^{(j)}$ – вектор уточненных оценок периода дискретизации на j -й итерации. Положим $\bar{\mathbf{T}}_M^{(1)} = \hat{\mathbf{T}}_M^{(1)}$. Следующий $(j+1)$ -й вектор уточненных оценок получается в результате выполнения следующих шагов:

1) интерполируем вектор $\hat{\mathbf{T}}_M^{(j)}$, считая, что он задан на векторе отсчетов $\mathbf{U}_M = (1, \dots, M-1)/M$, на вектор $\mathbf{V}_N = (1, \dots, N-1)/N$:

$$\tilde{\mathbf{T}}_N^{(j)} = \text{interp}(\mathbf{U}_M, \hat{\mathbf{T}}_M^{(j)}, \mathbf{V}_N),$$

где $\tilde{\mathbf{T}}_N^{(j)} = \{\tilde{T}_n, n=1, \dots, N-1\}$ – оценка вектора периодов дискретизации на всем интервале анализа, полученная на j -й итерации; $\text{interp}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{x}')$ – оператор интерполирования функции $f(x)$, заданной вектором своих отсчетов $\mathbf{f} = f(\mathbf{x})$ на векторе узлов $\mathbf{x}$, на вектор $\mathbf{x}'$;

2) находим вектор отсчетов времени на j -й итерации:

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(j)} = \left\{ t_n = \sum_{k=1}^n \tilde{T}_k^{(j)}, n=0, \dots, N-1 \right\};$$

3) используя интерполяцию, получаем вектор отсчетов сигнала на следующей итерации:

$$\Xi^{(j+1)} = \text{interp}(\tilde{\mathbf{t}}^{(j)}, \Xi^{(j)}, \mathbf{t}),$$

где $\mathbf{t} = \{n\hat{T}_1, n=0, \dots, N-1\}$ – равномерная сетка отсчетов с шагом $\hat{T}_1$ (12);

4) повторяем алгоритм оценки периодов дискретизации, описанный ранее, с полученным на предыдущем шаге вектором отсчетов сигнала $\Xi^{(j+1)}$, в результате чего получаем вектор оценок $\hat{\mathbf{T}}_M^{(j+1)}$;

5) уточняем вектор оценок периода дискретизации:

$$\bar{\mathbf{T}}_M^{(j+1)} = \bar{\mathbf{T}}_M^{(j)} + \hat{\mathbf{T}}_M^{(j+1)}.$$

Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $\tilde{\mathbf{t}}^{(j)} = \mathbf{t}$.

Рассмотренный алгоритм восстановления спектра является безытерационным и использует две хорошо известные в практике цифровой обработки сигналов процедуры – интерполяцию и быстрое преобразование Фурье (БПФ). Несмотря на это, оценить количество необходимых для реализации вычислительных операций сложно, по-

скольку это количество во многом зависит от выбора алгоритма интерполяции оценок СПМ и процедуры нахождения максимумов ВКФ оценок СПМ на сегментах. Можно лишь весьма грубо оценить количество необходимых вычислительных операций $K = O(ML \log_2 L)$, где L – количество узлов интерполяции при реализации преобразования Ламперти; запись $K = O(P)$ означает, что существует такая постоянная C , что $K \leq CP$.

В заключение необходимо отметить, что, вследствие симметрии СПМ, для чисто действительного сигнала $\xi(t)$ отпадает необходимость отдельно обрабатывать положительные и отрицательные ветви оценок СПМ, поскольку они равны друг другу.

Математическое моделирование. Для проверки предлагаемого алгоритма восстановления использовалось математическое моделирование. В качестве сигнала $\xi(t)$ была взята смесь белого шума $w(t)$ и четырех гармоник, амплитуды и частоты которых равны соответствующим параметрам тестового сигнала из [16]:

$$\xi(t) = w(t) + \sum_{j=1}^4 A_j \exp[i2\pi f_j t],$$

где $A_1 = 0.1, f_1 = -0.15; A_2 = 0.1, f_2 = 0.1; A_3 = 1, f_3 = 0.20; A_4 = 1, f_4 = 0.21$. Средняя мощность дискретных отсчетов белого шума была выбрана так, чтобы отношение сигнал/шум было равно $q^2 = -10$ дБ относительно наименее мощных гармоник смеси. Общая длительность интервала анализа составляла $T_a = 2^{18}$ при среднем периоде дискретизации $T_{cp} = 1$. Количество сегментов в эксперименте было выбрано равным $M = 2^8$, т. е. длина каждого сегмента составила $P = 2^{10}$. Период дискретизации при моделировании менялся по гармоническому закону:

$$T(t) = T_{cp} + \Delta T \sin(2\pi Ft),$$

где $\Delta T = 0.2$ и $F = 6.3/T_a$ – амплитуда и частота изменения периода дискретизации. Преобра-

зование Ламперти на сегментах осуществлялось с использованием монотонной кубической интерполяции.

На рис. 1 приведены спектрограммы сигнала $\xi(t)$, вычисленные на полном интервале анализа T_a при постоянном и переменном периодах дискретизации. Спектрограмма сигнала $\xi(t)$ (рис. 1, *a*) имеет линейчатый характер со спектральными линиями, расположенными на частотах гармоник смеси. Из рис. 1, *б* видно, к каким негативным последствиям привело изменение периода дискретизации: линейчатость спектра полностью исчезла, и вместо спектральных линий появились их "размытые" образы. Менее мощные гармоники с частотами $f_1 = -0.15$ и $f_2 = 0.10$ практически слились с шумовым фоном.

Аналогичная картина наблюдается на рис. 2, где представлены следующие оценки СПМ сигнала $\xi(t)$, выполненные по методу сегментирования интервала наблюдения с последующим усреднением спектрограмм (метод Бартлетта):

– на рис. 2, *a* – оценка $S_0(f)$, полученная по равномерно дискретизированной выборке с

периодом дискретизации T_{cp} ;

– на рис. 2, *б* – оценка $S_1(f)$, полученная по выборке с переменным априорно неизвестным периодом дискретизации $T(t)$ в предположении о равномерности дискретизации сигнала с периодом T_{cp} ;

– на рис. 2, *в* – оценка $S_2(f)$, полученная по выборке с переменным априорно известным периодом дискретизации $T(t)$ посредством восстановления отсчетов сигнала на равномерной сетке с шагом T_{cp} методом монотонной кубической интерполяции и использования процедуры БПФ;

– на рис. 2, *г* – оценка $G(f)$, полученная в результате восстановления СПМ предлагаемым методом, при переменном априорно неизвестном периоде дискретизации $T(t)$.

Оценка $S_0(f)$ может служить эталоном при определении качества других полученных оценок. Она имеет выраженный линейчатый характер, положения спектральных линий, их мощности и уровень шумового фона равны соответствующим параметрам спектрограммы на

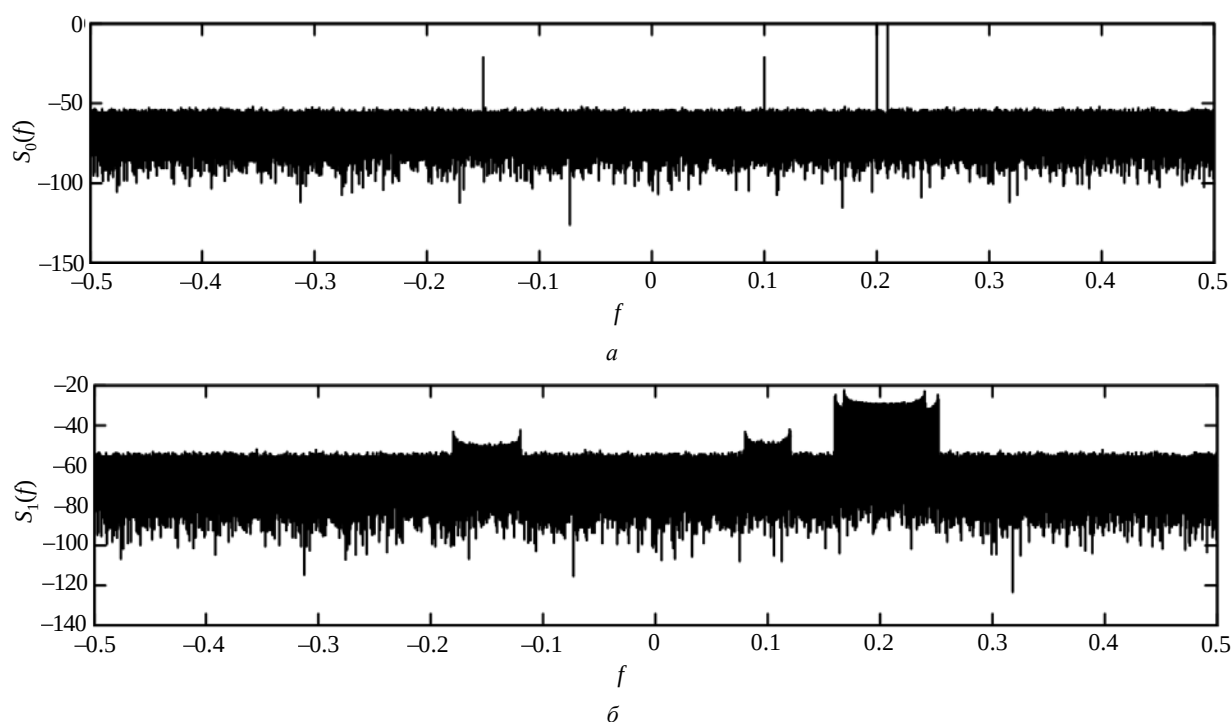


Рис. 1. Периодограммная оценка СПМ сигнала, полученная на полном интервале анализа: *a* – $T = T_{cp}$; *б* – $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$

Fig. 1. Periodogram estimate of the signal PSD obtained over the total interval of analysis: *a* – $T = T_{cp}$; *б* – $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$

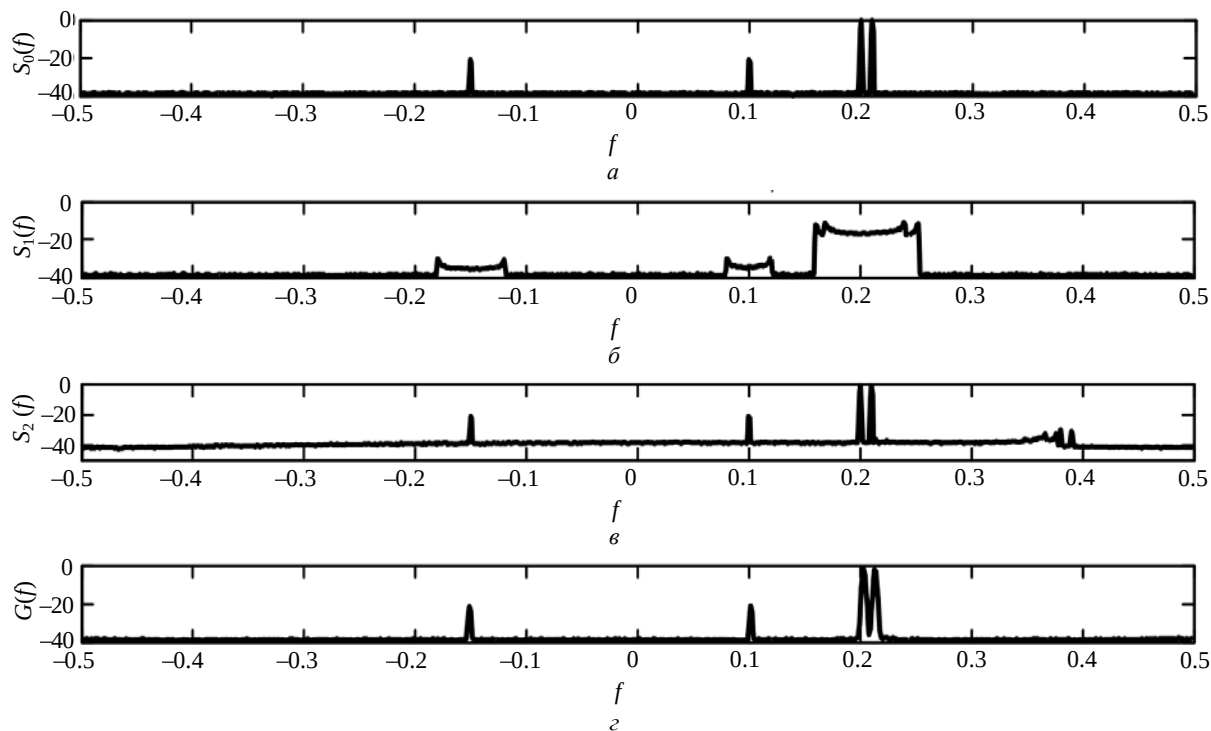


Рис. 2. Периодограммная оценка СПМ сигнала, выполненная по методу Бартлетта: а – S_0 при $T = T_{cp}$;
б – S_1 при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$; в – S_2 при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$; г – G при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$

Fig. 2. Periodogram estimate of the signal PSD obtained via the Bartlett method: а – S_0 при $T = T_{cp}$;
б – S_1 при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$; в – S_2 при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$; г – G при $T = T_{cp} + \Delta T \sin(\Omega t)$

рис. 1, а. У оценки $S_1(f)$ отдельные спектральные линии "расплылись", а близко расположенные вообще слились. Полученная монотонной кубической интерполяцией сигнала с неравномерным, но априорно известным расположением отсчетов, на равномерную сетку периодограмма $S_2(f)$ практически тождественна оценке $S_0(f)$. Восстановленная описанным ранее алгоритмом оценка СПМ $G(f)$ приведена на рис. 2, г. Эта оценка имеет четко выраженный линейчатый вид, практически идентичный спектру сигнала на рис. 2, а. Отдельные спектральные линии соответствуют гармоникам сигнальной смеси. Мощности гар-

моник и шумового фона также с высокой точностью равны истинным значениям. Оценки частот и мощностей гармоник в составе сигнала, полученные по периодограммам $G(f)$ и $S_2(f)$, представлены в таблице. Из нее следует, что при выбранных сценарных параметрах максимальные ошибки оценок частоты и мощности гармоник, полученные по периодограмме $G(f)$, составляют соответственно 0.0031 и 2.241 дБ. Аналогичные показатели для оценок, полученных по периодограмме $S_2(f)$, равны 0.0004 и 1.180 дБ. Сравнение этих результатов свидетельствует о меньших значениях ошибок восстановления спектра в случае, когда временное положе-

Истинные значения и оценки частот и мощностей гармоник
True and estimated frequencies and powers of signal harmonics

Истинная частота	Истинная мощность, дБ	$G(f)$		$S_2(f)$	
		Оценка частоты	Оценка мощности, дБ	Оценка частоты	Оценка мощности, дБ
-0.15	-20	-0.1514	-21.300	-0.1504	-21.1800
0.10	-20	0.1016	-20.930	0.0996	-21.1400
0.20	0	0.2031	-1.832	0.2002	-0.7675
0.21	0	0.2129	-2.253	0.2100	-0.5603

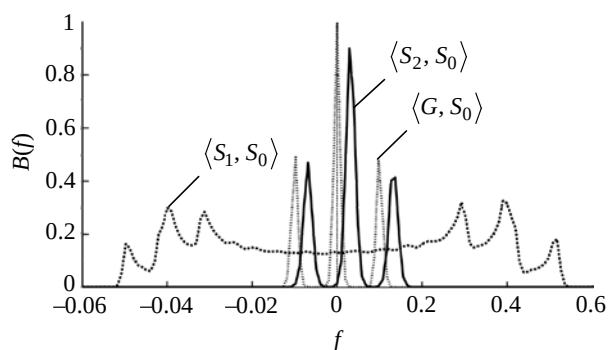


Рис. 3. Нормированные ВКФ оценок СПМ
Fig. 3. Normalized cross-correlation functions of the PSD estimates

ние отсчетов сигнала известно точно. Однако разница в абсолютных значениях между оценками частот и мощностей гармоник, полученных по периодограммам $G(f)$ и $S_2(f)$, мала.

Для оценки качества предлагаемого алгоритма были вычислены нормированные ВКФ $B(f)$ периодограмм $S_1(f)$, $S_2(f)$, $G(f)$ и эталона $S_0(f)$, графики которых представлены на рис. 3. Выбор нормированной ВКФ в рассматриваемой ситуации объясняется линейчатым характером спектра сигнала. Дело в том, что показатели, основанные на вычислении функциональных норм разницы периодограмм $S_1(f)$, $S_2(f)$, $G(f)$ и эталона $S_0(f)$, не могут обеспечить объективность оценки качества, поскольку даже небольшие ошибки в определении положения спектральных линий приводят к большим значениям соответствующих норм.

Как следует из рисунка, лучшее качество оценивания соответствует оценке $S_2(f)$: максимум нормированной ВКФ $B(f)$ – коэффициент взаимной корреляции (КВК) $r=1$. Это не вызывает удивления, поскольку при вычислении оценки $S_2(f)$ были точно известны моменты взятия отсчетов сигнала. Худшим качеством обладает оценка $S_1(f)$, которая практически не коррелирована с эталоном $S_0(f)$. Восстановленная оценка $G(f)$, как следует из рис. 3, сдвинута по частоте относительно эталона на 0.003, а КВК для нее $r=0.9$. Учитывая достаточно длительную обработку выборки и полное априорное незнание моментов взятия отсчетов, на основании полученных результатов можно

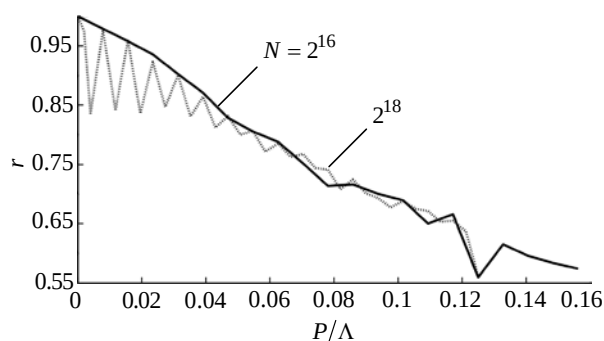


Рис. 4. Зависимость коэффициента взаимной корреляции оценок СПМ $G(f)$ и $S_0(f)$ от отношения P/Λ

Fig. 4. Cross-correlation coefficient of the PSD estimates $S_0(f)$ and $G(f)$ versus the ratio P/Λ

констатировать хорошее качество восстановления СПМ сигнала предлагаемым способом.

Введенный критерий качества позволяет также решить задачу выбора размера сегмента P . На рис. 4 приведены зависимости КВК r от отношения размера сегмента P к периоду колебаний периода дискретизации $\Lambda = 2\pi/(\Omega T_{\text{ср}})$ при разных размерах сигнальной выборки N . Приведенные на рисунке графики свидетельствуют о независимости r от N . Этот факт упрощает выбор параметра P . Для определения размера сегмента P достаточно задать предельное значение r и по графику определить искомое значение. Так, например, при $r=1/\sqrt{2}$ получим $P \leq 0.1\Lambda$, т. е. на периоде колебаний периода дискретизации должно помещаться не менее 10 сегментов. Очевидно, что при негармоническом законе изменения периода дискретизации в формуле для периода Λ должна стоять максимальная частота спектра колебаний периода дискретизации Ω_{max} .

На рис. 5 приведены графики изменения периода дискретизации $T(t)$ на интервале анализа, а также его оценки $\hat{T}(t)$, полученной после первого прохода алгоритма восстановления СПМ. Из рисунка следует, что график оценки периода дискретизации с высокой точностью совпадает с графиком изменения истинного значения периода. Максимальная ошибка оценивания составляет примерно 4.7 % от периода $T_{\text{ср}}=1$. Уточнение оценки описанным ранее итерационным алгоритмом позволяет уменьшить эту ошибку до 1.3 % при количестве итераций $J=5$.

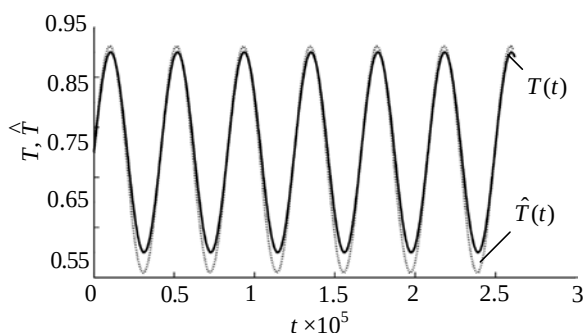


Рис. 5. Графики изменения периода дискретизации и его оценки на интервале анализа

Fig. 5. Plots of the signal discretization period and its estimate over the total interval of analysis

Заключение. В статье описано решение задачи синтеза алгоритма восстановления спектральной плотности мощности полигармонического сигнала, период дискретизации которого медленно по сравнению с самим сигналом изменяется во времени. В основе алгоритма лежит преобразование Ламперти – одно из известных в теории случайных процессов масштабно-инвариантных преобразований. Предложенный алгоритм является прямым и не требует многократных итераций. При цифровой реализации алгоритма используются алгоритмы интерполяции функций и быстрого преобразования Фурье. Математическое моделирование алгоритма доказало его работоспособность в достаточно сложных условиях, когда отклонения периода дискретизации составляли 20 % от его среднего значения. Максимальные ошибки при оценке частот и мощностей гармоник в составе сигнала при выбранных сценарных параметрах составили соответственно 0.003 от средней частоты дискретизации и 2.241 дБ. Коэффициент взаимной корреляции полученного спектра с оценкой спектра при равномерной дискретизации с известным периодом, которая была использована в качестве эталона, составил 0.9. Алгоритм дает возможность достаточно просто и с высоким качеством оценить изменения периода дискретизации на интервале анализа. В проведенном математическом эксперименте максимальная ошибка оценки периода дискретизации была равна 5 % от его среднего значения. Алгоритм может быть использован для восстановления спектра сигнала, полученного при нерегулярной дискретизации или в случае медленных изменений периодичности самого анализируемого сигнала.

Приложение. Численный алгоритм преобразования Ламперти. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая ограниченный спектр и заданная на конечном интервале $x \in [0, X]$. Преобразованием Ламперти функции $f(x)$, $x \in [0, X]$ называется функция $f_\Lambda(y) = f(e^y)$, $y \in (-\infty, \ln X]$. Определим способ вычисления ПЛ функции $f(x)$, зная множество отсчетов дискретной функции $f[n] = f(n\Delta x)$, $n = 0, \dots, N-1$, полученной из $f(x)$ равномерной дискретизацией с периодом Δx .

Поставленная задача решается интерполяцией функции $f[n]$, $n = 0, \dots, N-1$, заданной на равномерной сетке $x_n = n\Delta x$, $n = 0, \dots, N-1$. Метод интерполяции может быть любым, и его выбор определяется компромиссом между обеспечиваемой точностью и скоростью вычислений. В качестве новой сетки для переменной y возьмем также равномерную сетку $\bar{x}_m = e^{y_m} = e^{m\Delta y}$, $m = -M, \dots, M-1$. Тогда задача будет решена, если определены параметры: Δy – период дискретизации по y ; $2M$ – количество точек новой сетки. Выбор этих параметров должен подчиняться двум условиям:

1) нижняя $\bar{x}_{-M}$ и верхняя $\bar{x}_{M-1}$ границы новой сетки должны быть такими, что

$$[\bar{x}_{-M}, \bar{x}_{M-1}] \subset [0, X];$$

2) для любого $m \in [-M, M-1]$ шаг между соседними узлами новой сетки должен быть меньше или равен Δx :

$$\Delta \bar{x}_m = \bar{x}_m - \bar{x}_{m-1} \leq \Delta x.$$

Выполнение первого условия необходимо для того, чтобы избежать экстраполирования функции $f(x)$ за пределы области ее определения. Второе условие является следствием обобщенной теоремы отсчетов [9]: функция $f(x)$, имеющая ограниченный по ширине спектр и представленная множеством упорядоченных отсчетов в узлах неравномерной сетки, может быть восстановлена, если максимальный интервал между отсчетами $\Delta x_{\max} \leq 1/(2\nu_{\max})$, где $\nu_{\max}$ – граничная частота спектра.

Одновременное выполнение этих условий требует решения системы неравенств

$$\begin{cases} e^{(M-1)\Delta y} \leq X, \\ e^{(M-1)\Delta y} - e^{(M-2)\Delta y} \leq \Delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{(M-1)\Delta y} \leq X, \\ e^{(M-1)\Delta y} (1 - e^{-\Delta y}) \leq \Delta x. \end{cases}$$

Если принять, что $e^{(M-1)\Delta y} = X$, то для шага Δy и M будут справедливы следующие условия:

$$\begin{cases} \Delta y \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{N-1}\right), \\ M = 1 + \frac{\ln X}{\Delta y}, \end{cases}$$

где учтено, что $X = (N-1)\Delta x$.

Определив из полученной системы Δy и M , можно получить ПЛ функции $f(x)$, $x \in [0, X]$ любым из известных способов интерполяции ее значений $f[n] = f(n\Delta x)$, $n = 0, \dots, N-1$ на новую сетку $\bar{x}_m = e^{m\Delta y}$, $m = -M, \dots, M-1$.

Список литературы

1. Feichtinger H. G., Gröchenig K., Strohmer T. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numerische Mathematik. 1995. Vol. 69. P. 423–440. doi: 10.1007/s002110050101
2. Algorithms for spectral analysis of irregularly sampled time series / A. Mathias, F. Grond, R. Guardans, D. Seese, M. Canela, H. H. Diebner // J. of Statistical Software. 2004. Vol. 11, № 2. P. 1–27. doi: 10.18637/jss.v011.i02
3. Babu P., Stoica P. Spectral analysis of nonuniformly sampled data – a review // Digital Signal Processing. 2010. Vol. 20. P. 359–378. doi: 10.1016/j.dsp.2009.06.019
4. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // IEEE Transaction on Signal Processing. 2000. Vol. 48, № 12. P. 3462–3471. doi: 10.1109/78.887038
5. Browning J. A method of finding unknown continuous time nonuniform sample locations of band-limited functions // Advanced signal processing algorithms, architectures and implementations. 2004. Vol. XIV. P. 289–296. doi: 10.1117/12.560450
6. Browning J. Approximating signals from nonuniform continuous time samples at unknown locations // IEEE Transactions on Signal Processing. 2007. Vol. 55, № 4. P. 1549–1554. doi: 10.1109/tsp.2006.889979
7. Sampling at unknown locations, with an application in surface retrieval / M. Pacholska, B. Béjar Haro, A. Scholefield, M. Vetterli // Proc. of the 12th Intern. Conf. on Sampling Theory and Applications, Tallinn, Estonia, 03–07 July 2017. IEEE, 2017. P. 364–368. doi: 10.1109/sampta.2017.8024451
8. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. Алгоритмы повышения точности восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными координатами узлов // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2014. Т. 17, вып. 6. С. 17–23.
9. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. Исследование алгоритмов восстановления дискретных сигналов,

заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов. Ульяновск: Зебра, 2016. 211 с.

10. Porshnev S.V., Kusaykin D.V., Klevakin M. A. Features of the irregularly sampled discrete-time signals with unknown jittered sampling locations. Algorithms based on sampling locations correction // XI Intern. Scientific and Technical Conf. "Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)", Omsk, Russia, 14–16 Nov. 2017. P. 1–5. doi: 10.1109/DYNAMICS.2017.8239494

11. Damaschke N., Kühn V., Nobach H. Bias correction for direct spectral estimation from irregularly sampled data including sampling schemes with correlation // EURASIP J. on Advances in Signal Processing. 2021. Art. num. 7. doi: 10.1186/s13634-020-00712-4

12. Lamperti J. Semi Stable Stochastic Processes // Transactions of the American Mathematical Society. 1962. Vol. 104. P. 62–78. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0138128-7

13. Flandrin P., Borgnat P., Amblard P. O. From Stationarity to Self-similarity, and Back: Variations on the Lamperti Transformation. In: Rangarajan G., Ding M. (eds). Processes with Long-Range Correlations. Lecture Notes in Physics. Vol. 621. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. doi: 10.1007/3-540-44832-2_5

14. Монаков А. А. Применение масштабно инвариантных преобразований при решении некоторых задач цифровой обработки сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. Т. 65, № 11. С. 65–72.

15. Gray H. L., Zhang N. F. On a class of nonstationary processes // J. of Time Series Analysis. 1988. Vol. 9, № 2. P. 133–154. doi: 10.1111/j.1467-9892.1988.tb00460.x

16. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

17. Stoica P., Moses R. L. Introduction to Spectral Analysis. Upper Saddle River, USA: Prentice-Hall, 1997. 319 p.

Информация об авторе

Монаков Андрей Алексеевич – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Восстановление спектра полигармонического сигнала при медленных флуктуациях периода дискретизации
Reconstructing the Spectrum of a Polyharmonic Signal under Slow Fluctuations in the Sampling Period 47

ния. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 220 научных работ. Сфера научных интересов – радиолокация протяженных целей; цифровая обработка сигналов; радиолокаторы с синтезированной апертурой; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением.

Адрес: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67 А, Санкт-Петербург, 190000, Россия

E-mail: a_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

References

1. Feichtinger H. G., Gröchenig K., Strohmer T. Efficient Numerical Methods in Non-Uniform Sampling Theory. *Numerische Mathematik*. 1995, vol. 69, pp. 423–440. doi: 10.1007/s002110050101
2. Mathias A., Grond F., Guardans R., Seese D., Canela M., Diebner H. H. Algorithms for Spectral Analysis of Irregularly Sampled Time Series. *J. of Statistical Software*. 2004, vol. 11, no. 2, pp. 1–27. doi: 10.18637/jss.v011.i02
3. Babu P., Stoica P. Spectral Analysis of Nonuniformly Sampled Data – A Review. *Digital Signal Processing*. 2010, vol. 20, pp. 359–378. doi: 10.1016/j.dsp.2009.06.019
4. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of Irregularly Sampled Discrete-Time Bandlimited Signals with Unknown Sampling Locations. *IEEE Transaction on Signal Processing*. 2000, vol. 48, no. 12, pp. 3462–3471. doi: 10.1109/78.887038
5. Browning J. A Method of Finding Unknown Continuous Time Nonuniform Sample Locations of Band-Limited Functions. *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations*. 2004, vol. XIV, pp. 289–296. doi: 10.1117/12.560450
6. Browning J. Approximating Signals from Nonuniform Continuous Time Samples at Unknown Locations. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2007, vol. 55, no. 4, pp. 1549–1554. doi: 10.1109/tsp.2006.889979
7. Pacholska M., Béjar Haro B., Scholefield A., Vetterli M. Sampling at Unknown Locations, with an Application in Surface Retrieval. *Proc. of the 12th Intern. Conf. on Sampling Theory and Applications*, Tallinn, Estonia, 03–07 July 2017. *IEEE*, 2017, pp. 364–368. doi: 10.1109/sampta.2017.8024451
8. Porshnev S. V., Kusaykin D. V. Algorithms for the Reconstruction of Irregularly Sampled Discrete-Time Signals with Unknown Sampling Locations. *J. of the Russian Universities. Radioelectronics*. 2014, vol. 17, no. 6, pp. 17–23. (In Russ.)
9. Porshnev S. V., Kusaykin D. V. Research of Algorithms for the Reconstruction of Non Uniform Sampled Discrete Time Signals with Unknown Sampling Locations. *Ulyanovsk*, 2016, 211 p. (In Russ.)
10. Porshnev S. V., Kusaykin D. V., Klevakin M. A. Features of the Irregularly Sampled Discrete-Time Signals with Unknown Jittered Sampling Locations. *Algorithms Based on Sampling Locations Correction. XI Intern. Scientific and Technical Conf. "Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)"*, Omsk, Russia, 14–16 Nov. 2017, pp. 1–5. doi: 10.1109/DYNAMICS.2017.8239494
11. Damaschke N., Kühn V., Nobach H. Bias Correction for Direct Spectral Estimation From Irregularly Sampled Data Including Sampling Schemes with Correlation. *EURASIP J. on Advances in Signal Processing*. 2021, art. num. 7. doi: 10.1186/s13634-020-00712-4
12. Lamperti J. Semi Stable Stochastic Processes. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1962, vol. 104, pp. 62–78. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0138128-7
13. Flandrin P., Borgnat P., Amblard P. O. From Stationarity to Self-similarity, and Back: Variations on the Lamperti Transformation. In: Rangarajan G., Ding M. (eds). *Processes with Long-Range Correlations. Lecture Notes in Physics*. Vol. 621. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003. doi: 10.1007/3-540-44832-2_5
14. Monakov A. A. Scale-Invariant Transformations in Some Problems of Digital Signal Processing. *Achievements of Modern Radioelectronics*. 2007, vol. 65, no. 11, pp. 65–72. (In Russ.)
15. Gray H. L., Zhang N. F. On a Class of Nonstationary Processes. *J. of Time Series Analysis*. 1988, vol. 9, no. 2, pp. 133–154. doi: 10.1111/j.1467-9892.1988.tb00460.x
16. Marple Jr. S. L. *Digital Spectral Analysis with Applications*. New Jersey, Prentice-Hall, 1987, 492 p.
17. Stoica P., Moses R. L. *Introduction to Spectral Analysis*. Upper Saddle River, USA, Prentice-Hall, 1997, 319 p.

Information about the author

Andrey A. Monakov, Dr Sci. (Eng.) (2000), Professor (2005) of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation. Honored Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honored Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 220 scientific publications. Area of expertise: extended radar targets; digital signal processing; synthetic aperture radar; remote sensing; air traffic control.

Address: Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67 A, Bolshaya Morskaya St., St Petersburg 190000, Russia

E-mail: a_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>