Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2023. Т. 26, № 5. С. 6–20
Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2023, vol. 26, no. 5, pp. 6–20

Радиолокация и радионавигация

УДК 621.396.9

Обзорная статья

https://doi.org/10.32603/1993-8985-2023-26-5-6-20

Работы школы ЛЭТИ в области синтеза оптимальных дискретных сигналов

В. П. Ипатов✉

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"
им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉vpipatov@etu.ru

Аннотация

Введение. Многочисленные современные инфокоммуникационные системы имеют в своей основе широкополосную философию, т. е. используют сигналы с большим произведением ширины спектра на длительность. Для многих подобных систем характерно использование дискретных сигналов, представляющих собой последовательности стандартных импульсов, манипулированных по фазе и амплитуде. Синтез кодовых последовательностей для таких сигналов является достаточно наукоемкой задачей, опирающейся на серьезный математический аппарат. В обзоре излагаются результаты исследований школы ЛЭТИ в области синтеза кодовых последовательностей с идеальной или почти идеальной автокорреляцией, а также кодовых ансамблей для CDMA-сетей.

Цель работы. Обзор призван познакомить читателя с итогами многолетних исследований школы ЛЭТИ в области синтеза дискретных сигналов.

Материалы и методы. Основу материала составляют публикации специалистов кафедры радиосистем ЛЭТИ, а также те работы отечественных и зарубежных коллег, цитирование которых необходимо для целостности изложения. При этом материал отсылает только к наиболее значимым в теоретическом плане текстам, опубликованным в ведущих отечественных и зарубежных изданиях за последние четыре десятилетия, оставляя за рамками обзора многочисленные статьи прикладного характера, а также авторские свидетельства и патенты. В то же время сочтено целесообразным цитирование зарубежных публикаций, прямо указывающих на приоритетный характер разработок презентуемого коллектива и их практическое использование в реализованных проектах инфокоммуникационного направления.

Результаты. Итоги обсуждаемых исследований существенно расширяют номенклатуру дискретных сигналов, привлекательных для беспроводных инфокоммуникационных приложений.

Заключение. Решения ряда актуальных задач синтеза последовательностей с необходимыми метрическими свойствами имеют оригинальный характер и большую прикладную значимость.

Ключевые слова: дискретный сигнал, кодовая последовательность, боковой лепесток АКФ, идеальная автокорреляция, кодовое разделение, сигнатурный ансамбль, корреляционный пик

Для цитирования: Ипатов В. П. Работы школы ЛЭТИ в области синтеза оптимальных дискретных сигналов // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2023. Т. 26, № 5. С. 6–20. doi: 10.32603/1993-8985-2023-26-5-6-20

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 23.03.2023; принята к публикации после рецензирования 07.06.2023; опубликована онлайн 29.11.2023

Radar and Navigation

Review article

Contribution of the Scientific School of Saint Petersburg Electrotechnical University in the Field of Optimal Discrete Signal Design

Valery P. Ipatov✉

Saint Petersburg Electrotechnical University, St Petersburg, Russia

✉vpipatov@etu.ru

Abstract

Introduction. Numerous modern infocommunication systems are based on the spread spectrum technology, i.e., on the use of signals with a large bandwidth-duration product. Many such systems implement discrete signals, which are sequences of standard pulses manipulated in phase and amplitude. The design of code sequences for such signals is a fairly knowledge-intensive task requiring a serious mathematical apparatus. This review presents the results of Saint Petersburg Electrotechnical University school in the field of synthesis of code sequences with ideal or nearly ideal autocorrelation, as well as code ensembles for CDMA networks.

Aim. To acquaint the reader with the results of long-term research carried out by Saint Petersburg Electrotechnical University school in the field of discrete signal design.

Materials and methods. The materials under review included the publications of specialists from the Radio System Department of Saint Petersburg Electrotechnical University and those published by domestic and foreign researchers on the corresponding topics. The major focus was to review the most theoretically significant texts published in leading domestic and foreign journals over the past four decades, leaving applied studies, copyright certificates and patents outside the scope of the review. At the same time, the review included those foreign publications of applied nature that are significant for the development of information and communication projects.

Results. The reviewed publications significantly expand the range of discrete signals that are promising for wireless infocommunication applications.

Conclusion. Solutions of a number of the studied topical problems to design sequences with the necessary metric properties are of an original nature and great practical importance.

Keywords: discrete signal, code sequence, ACF sidelobe, perfect autocorrelation, CDMA, signature ensemble, correlation peak

For citation: Ipatov V. P. Contribution of the Scientific School of Saint Petersburg Electrotechnical University in the Field of Optimal Discrete Signal Design. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2023, vol. 26, no. 5, pp. 6–20. doi: 10.32603/1993-8985-2023-26-5-6-20

Conflict of interest. The author declares no conflicts of interest.

Submitted 23.03.2023; accepted 07.06.2023; published online 29.11.2023

Введение. Дискретные широкополосные сигналы нашли массовое применение в современных беспроводных инфокоммуникационных системах. Показательны в этом отношении примеры радионавигации космического базирования (GPS, ГЛОНАСС, Galileo и т. д.), сетей мобильной связи, радиолокационных комплексов и др., где в полной мере утилизируются ценные преимущества широкополосной философии [1–3] в гармоничном сочетании с технологическими трендами цифровой эры.

Исследования в области синтеза дискретных сигналов на кафедре радиосистем ЛЭТИ имеют почти полувековую историю. К середине 70-х гг. в исследовательской группе проф. Ю. А. Коломенского сформировалась компактная команда сотрудников, объединенных общим интересом к передовым на тот момент идеям широкополосной радиоэлектроники и сопутствующим им проблемам оптимизации сигналов. Первые работы в этой области были связаны с актуальными в 60–70-е гг. проектами сетей дальней навигации наземного базирования, использующих сигналы с пониженной пиковой мощностью. В дальнейшем поиски соответствующей направленности стимулировались также заинтересованностью со стороны бурно развивавшейся спутниковой радионавигации, радиолокации с квазинепрерывным излучением и т. п.

В предлагаемом обзоре будут рассмотрены дискретные сигналы, представляющие собой последовательности стандартных импульсов (чипов), повторяющихся с регулярным интервалом и манипулированных по фазе и амплитуде. Комплексная огибающая $\dot{S}(t)$ подобного сигнала описывается моделью

$$\dot{S}(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \dot{S}_0(t-i\Delta), \qquad (1)$$

где $\dot{S}_0(t)$ – комплексная огибающая чипа; Δ – период повторения чипов; $..., a_{-1}, a_0, a_1,...$ – кодовая последовательность, задающая закон манипуляции комплексных амплитуд чипов.

В приложении к гауссовскому каналу приоритетную важность имеют корреляционные свойства кодовых последовательностей в модели (1). Если требуется единственный сигнал, ключевая роль принадлежит автокорреляционной функции (АКФ): апериодической (импульсной) $R_\text{а}(m)$, если сигнал представляет собой пакет из N чипов:

$$R_\text{а}(m)=\begin{cases}\sum\limits_{i=m}^{N-1} a_i a_{i-m}^*, \ m \ge 0;\\ \sum\limits_{i=0}^{N+m-1} a_i a_{i-m}^* = R_\text{а}^*(-m), \ m \le 0,\end{cases}$$

и периодической $R_\text{р}(m)$, если кодовая последовательность периодически повторяется с периодом в N чипов:

$$R_\text{р}(m)=\sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m}^*; \qquad (2)$$
$$a_{i+kN}=a_i; \ i, k = ..., -1, 0, 1, ...$$

Понятно, что периодический сигнал можно получить повторением апериодического с периодом $N\Delta$. В обоих случаях N принято называть длиной кодовой последовательности. Синтез сигналов, АКФ которых подобна АКФ одиночного чипа, является содержательной и зачастую весьма непростой задачей, настоятельный запрос на решение которой характерен для систем, имеющих целью измерение времени, разрешение сигналов, синхронизацию временных шкал и т. п.

В тех же случаях, когда необходимо множество (ансамбль) K сигналов, наряду с автокорреляционными приходится контролировать и взаимно-корреляционные свойства кодовых последовательностей. Так, для сигналов с номерами k и l апериодическая $R_{\text{а},kl}(m)$ и периодическая $R_{\text{р},kl}(m)$ взаимные корреляционные функции (ВКФ) даются соотношениями

$$R_{\text{а},kl}(m)=\begin{cases}\sum\limits_{i=m}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^*, \ m \ge 0;\\ \sum\limits_{i=0}^{N+m-1,} a_{k,i} a_{l,i-m}^*, \ m \le 0;\end{cases} \qquad (3)$$

$$R_{\text{р},kl}(m)=\sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^*,$$

где $a_{k,i}$ $(k=1,2,...,K; \ i=...,-1,0,1,...)$ – кодовая последовательность k-го сигнала. Задачи синтеза ансамблей слабо коррелированных сигналов возникают при построении многопользовательских систем с кодовым разделением (спутниковая радионавигация, мобильная связь и пр.).

Бинарные последовательности с малыми потерями на подавление боковых лепестков периодической АКФ. Как уже отмечалось, в приложениях, связанных с оценкой времени прихода сигнала, за идеальную апериодическую АКФ (АПАКФ) $R_\text{а}(m)$ естественно было бы принять АКФ одиночного чипа, иными словами, такую, которая отличается от нуля в единственной точке $m=0$. Для нетривиального дискретного сигнала, однако, $N>1$ и подобная АПАКФ нереализуема хотя бы потому, что $R_\text{а}(N-1)=a_{N-1}a_0^* \ne 0,$ т. е. АПАКФ помимо основного лепестка, отвечающего $m=0,$ имеет и боковые при каких-то ненулевых m. Понятно, что уровень боковых лепестков желательно иметь как можно меньшим, что находит отражение в минимаксном критерии оптимальности дискретного сигнала, формализуемом после перехода к нормированным АКФ следующим образом:

$$\rho_{\text{а max}}=\max_{m\ne 0}\left|\frac{R_\text{а}(m)}{R(0)}\right|=\min. \qquad (4)$$

Уровень боковых лепестков ПАКФ можно охарактеризовать аналогичным показателем:

$$\rho_{\mathrm{p}\max} = \max_{m=1,2,\ldots,N-1}\left|\frac{R_{\mathrm{p}}(m)}{R(0)}\right|. \qquad (5)$$

Заметим, что индексы в знаменателях дробей в (4)–(5) опущены, поскольку $R_{\mathrm{a}}(0)$ и $R_{\mathrm{p}}(0)$ тождественно равны.

Максимальные боковые лепестки АПАКФ и ПАКФ связаны неравенством [3–5]

$$\rho_{\mathrm{a}\max} \ge \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{p}\max},$$

показывающим, что "хорошие" апериодические сигналы (имеющие малые боковые лепестки АПАКФ) могут быть найдены только среди сигналов с низкими боковыми лепестками ПАКФ. Этот факт является одним из оснований первоочередного интереса к дискретным сигналам, обладающим идеальной ПАКФ

$$\rho_{\mathrm{p}}(m) = \frac{R_{\mathrm{p}}(m)}{R(0)} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \ne 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Подчеркнем, что, в отличие от АПАКФ, уровень бокового лепестка ПАКФ не ограничен снизу, так как в сумме в (2) возможна взаимная компенсация слагаемых. Разумеется, для идеальной ПАКФ $\rho_{\mathrm{p}\max} = 0$.

Помимо изложенного существенным стимулом к поиску кодовых последовательностей с идеальной ПАКФ служит широкое распространение в реальных приложениях сигналов периодической структуры, привлекательность которых определяется именно свойствами ПАКФ. Если пропустить сигнал с идеальной ПАКФ через фильтр, согласованный с однопериодным отрезком сигнала, установившийся отклик фильтра примет вид повторяющихся с периодом $N\Delta$ главных пиков, между которыми никаких ненулевых всплесков наблюдаться не будет. Это означает, что наложенные друг на друга сдвинутые (например, многолучевые) копии сигнала при адекватном выборе параметров N и Δ окажутся полностью разрешенными, чем и объясняется особая прикладная ценность сигналов с ПАКФ вида (6).

При поиске кодовых последовательностей с требуемыми корреляционными характеристиками алфавит, которому принадлежат символы a_i, обычно фиксируется априори исходя из технологических возможностей, аппаратного ресурса и т. д. В этом свете предпочтение нередко отдается бинарным последовательностям (БП) с алфавитом $\{\pm 1\}$ как наиболее простым в реализации и идеально сопрягающимся с цифровой идеологией современных приемопередающих устройств. К сожалению, бинарный алфавит несовместим с идеальностью ПАКФ: на основании результатов [6] и ряда последующих работ [7–9] можно утверждать о несуществовании БП с ПАКФ вида (6) ни для каких длин, за исключением $N = 4$. Подобная констатация вместе с кратностью четырем разности между длиной БП и любым отсчетом ее ненормированной ПАКФ приводит к нижним границам максимального периодического бокового лепестка БП длины N:

$$\rho_{\mathrm{p}\max} \ge \begin{cases} \dfrac{1}{N}, & N \equiv 1 \bmod 2; \\ \dfrac{2}{N}, & N \equiv 2 \bmod 4; \\ \dfrac{4}{N}, & N \equiv 0 \bmod 4. \end{cases} \qquad (7)$$

Известно достаточно много минимаксных, т. е. достигающих границ (7) БП [4]. Вместе с тем в приложениях встречаются сценарии, например в каналах с очень большим превышением прямого сигнала многолучевыми копиями, когда нужное качество приема гарантируется лишь при чрезмерной длине минимаксной БП, неприемлемой с точки зрения начального ввода в синхронизм или по иным соображениям. Остаться в рамках бинарного алфавита в подобных ситуациях удается, если перейти к рассогласованной обработке, обнуляющей все боковые лепестки ПАКФ на периоде повторения сигнала.

В [10–12] показано, что фильтр, подавляющий все боковые лепестки ПАКФ (ФПБЛ), может быть построен для любой последовательности, не имеющей нулевых компонент ДПФ-спектра. Поскольку коэффициент передачи такого фильтра в ДПФ-базисе обратен ДПФ-спектру кодовой последовательности, он, по существу, является инверсным фильтром или, эквивалентно, нуль-форсирующим эквалайзером. Несуществование БП с идеальной ПАКФ означает рассогласованность ФПБЛ для таких последовательностей, т. е. обработка БП подобным фильтром сопровождается энергетическими потерями. Значение этих потерь γ увеличивается по мере возрастания неравномерности ДПФ-спектра БП, количественно характеризуемой отношением среднего арифметического мощностей спектральных компонент к их среднему гармоническому. В случае ФМ-сигнала, в частности для БП [3, 5, 11, 12]

$$\gamma = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\tilde{a}_k\right|^{-2},$$

где $\tilde{a}_k$ $(k = 0, 1, ..., N-1)$ – ДПФ-спектр БП.

Изложенное позволяет в корне изменить стратегию оптимизации БП, перейдя к критерию качества БП, альтернативному минимаксу. Действительно, коль скоро полное избавление от периодических боковых лепестков осуществимо для весьма широкого класса БП, разумно считать оптимальной ту БП, для которой обработка в ФПБЛ чревата минимальными энергетическими потерями. В качестве первого шага в этом направлении был предпринят исчерпывающий поиск БП, глобально оптимальных по критерию потерь в ФПБЛ, результаты которого, приведенные в [5, 13], показывают, что для большинства длин в диапазоне $N \le 30$ значения потерь γ не выходят за пределы десятых долей децибела. Так как экспоненциальный рост вычислительных затрат исключает использование переборной стратегии для практически значимых длин, последующие исследования были сфокусированы на отыскании регулярных алгоритмов построения БП с малыми (без гарантии глобальной оптимальности) потерями γ. Чрезвычайно эффективным в этом плане оказался синтезированный в [14, 15] алгоритм, описание которого на алгебраическом языке сводится к следующему. Пусть $GF(q)$ – основное поле Галуа порядка $q = p^w$, где p – простое, а w – натуральное число. Пусть $GF(q^n)$ – расширение степени n поля $GF(q)$; ξ – примитивный элемент расширенного поля $GF(q^n)$; $\mathrm{tr}(x)$ – след элемента x расширенного поля $GF(q^n)$ в основном поле $GF(q)$. Пусть v – делитель $q-1$, а $\theta: G \to \{\pm 1\}$ – некоторое отображение мультипликативной подгруппы G порядка v основного поля $GF(q)$ на бинарный алфавит. Тогда искомая БП задается правилом

$$a_i = \theta\left[\mathrm{tr}^u\left(\xi^i\right)\right],\ i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

где $u = (q-1)/v$. Период подобной БП $N = v\left(q^n - 1\right)/(q-1)$. Несмотря на абстрактный характер сформулированного алгоритма, его интерпретация достаточно прозрачна. Как известно [3, 5, 16], последовательность $\mathrm{tr}\left(\xi^i\right)$, $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$ есть q-ичная m-последовательность длины $L = q^n - 1$. Поэлементное возведение ее в степень u приводит к последовательности символов, принадлежащих подгруппе G, повторяющихся с периодом $N = v\left(q^n - 1\right)/(q-1)$. Последний шаг состоит в замене символов подгруппы G бинарными в соответствии с отображением θ. В итоге БП (8) может быть сформирована q-ичным регистром сдвига памяти n, к выходу которого подключен преобразователь, переводящий q-ичные символы в бинарные.

Как было установлено, правило (8) порождает наиболее привлекательные БП при отображении θ, основанном на (v, r) разностном множестве [5, 17], т. е. переводящем r элементов подгруппы G в –1, а $v - r$ остальных вместе с нулем поля $GF(q)$ – в +1. Дополнительным достоинством БП при этом оказывается предельная простота ФПБЛ, коэффициенты которого в трансверсальной реализации принимают не более трех различных значений, причем случай $v = 1$ отвечает известным БП Зингера [4, 5, 18], для которых число различных коэффициентов ФПБЛ сокращается до двух.

В табл. 1 приведены параметры q, v, r, n наиболее интересных БП указанного типа наряду со значениями длин для диапазона $N \le 1200$ и потерь γ в децибелах. Как можно видеть, описанная конструкция позволяет получить БП с исключительно малыми (до сотых долей децибела) потерями в ФПБЛ. Более того, *Табл. 1.* Параметры БП с малыми потерями в ФПБЛ

Tab. 1. Parameters of the binary sequences with low loss for sidelobe suppression

q, v, r	n	N	γ, дБ
3, 1, 1	2	2	0
	3	13	0.17
	4	40	0.37
	5	121	0.46
	6	364	0.49
	7	1093	0.51
5, 4, 3	2	24	0.28
	3	124	0.41
	4	624	0.45
7, 3, 2	2	24	0.30
	3	171	0.35
	4	1200	0.38
8, 7, 3	2	63	0.30
	3	511	0.44
13, 4, 3	2	56	0.69
	3	732	0.80
16, 15, 7	2	255	0.09
23, 11, 6	2	264	0.15
31, 15, 8	2	480	0.13
32, 31, 15	2	1023	0.02
47, 23, 12	2	1104	0.08
53, 13, 9	2	702	0.74
61, 15, 8	2	930	0.52

для отдельных семейств подобных БП потери асимптотически стремятся к нулю децибел с ростом длины N. Каталог привлекательных БП может быть существенно пополнен за счет посимвольного перемножения описанных БП с взаимно простыми периодами [5]. При этом период получаемой составной БП равен произведению периодов комбинируемых компонент, а ее потери в децибелах – сумме потерь последних.

Рассмотренные семейства БП нередко упоминаются в зарубежных книгах и статьях (см., например, [19]). Любопытна, в частности, информация об их реальном применении в некогерентных корабельных радарах [20, 21].

Троичные последовательности с идеальной ПАКФ. Описанные ранее БП позволяют за счет рассогласованности ФПБЛ "сымитировать" идеальную ПАКФ ценой некоторых энергетических потерь. Альтернативный подход может состоять в таком расширении алфавита последовательности, которое без существенных технологических усложнений устранило бы его несовместимость с идеальностью ПАКФ. Такого рода преобразованием является дополнение бинарного алфавита нулевым символом, т. е. переход к троичному алфавиту $\{0, \pm 1\}$, что в физической интерпретации отвечает введению пауз на некоторых позициях дискретного сигнала. Понятно, что в реализационном плане подобный алфавит не сложнее бинарного, и, если его использование откроет путь к достижению идеальной ПАКФ, ценой этого окажется лишь возрастание пиковой мощности сигнала относительно средней, обусловленное наличием упомянутых пауз. Напомним, что одним из ключевых преимуществ широкополосной философии является именно возможность сближения названных мощностей, поэтому, строя троичные последовательности (ТП) с идеальной ПАКФ (далее – идеальные ТП (ИТП)) [22], естественно стремиться к минимизации пик-фактора ν, т. е. отношения пиковой мощности к средней:

$$\nu = \frac{N \max\limits_{i} \left\{ |a_i|^2 \right\}}{\sum\limits_{i=0}^{N-1} |a_i|^2} = \frac{N}{N - N_0},$$

где N_0 – количество нулевых символов на периоде N троичной последовательности.

Исследования по поиску ИТП имеют давнюю историю, однако до 1979 г. не было известно каких-либо регулярных правил построения подобных последовательностей с низким пик-фактором, за исключением, пожалуй, ИТП Чанга длин $N = \left(3^n - 1\right)/2$, для которых значение $\nu \approx 1.5$ все же достаточно ощутимо [22]. Обширный класс ИТП с близким к единице пик-фактором был впервые описан в [23]. Введенное там правило по содержанию близко к правилу (8) и состоит в отображении элементов q-ичной m-последовательности на троичный алфавит $\{0, \pm 1\}$. Для записи его в алгебраических терминах воспользуемся ранее введенными обозначениями: $\mathrm{tr}(x)$ – след элемента x расширенного поля $GF(q^n)$ в основном поле $GF(q)$; ξ – примитивный элемент $GF(q^n)$. Наложим на степень расширения n и характеристику p поля $GF(q)$ требование нечетности. Тогда искомая ИТП может быть сформирована согласно алгоритму

$$a_i = \begin{cases} (-1)^i \psi\left[\mathrm{tr}\left(\xi^i\right)\right], \ \mathrm{tr}\left(\xi^i\right) \neq 0; \\ 0, \ \mathrm{tr}\left(\xi^i\right) = 0, \end{cases} \quad (9)$$
$$i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$$

где для любого ненулевого элемента y поля $GF(q)$

$$\psi(y) = (-1)^{\log_\mu y}$$

– двузначный характер мультипликативной группы поля, равный плюс или минус единице в зависимости от четности логарифма элемента y по основанию примитивного элемента μ основного поля $GF(q)$. Длина N и пик-фактор ν получаемой ИТП определяются соотношениями [5, 23]

$$N = \frac{q^n - 1}{q - 1}; \ \nu = \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} < \frac{q}{q-1}. \quad (10)$$

Как видно, для построения ИТП достаточно сгенерировать N-символьный сегмент q-ичной m-последовательности длины $L = q^n - 1$, заменить в нем нулевые символы действительным нулем, а ненулевые – их характерами, после чего полученную троичную последовательность посимвольно умножить на последовательность чередующихся плюс и минус единиц. Последнюю операцию можно исключить, преобразовав правило (9) в эквивалентное равенство [5]

$$a_i = \begin{cases} \psi\left[\mathrm{tr}\left(\beta^i\right)\right], \ \mathrm{tr}\left(\beta^i\right) \neq 0, \\ 0, \ \mathrm{tr}\left(\beta^i\right) = 0, \end{cases} \quad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \quad (11)$$

в котором β – элемент $GF(q^n)$, имеющий мультипликативный порядок $L_\beta = \dfrac{(q^n - 1)}{\text{НОД}(q - 1, N + 1)}$.

В итоге вместо m-последовательности можно использовать линейную рекуррентную последовательность (ЛРП) периода L_β, символы которой достаточно перевести в троичные согласно (11) без последующего домножения на знакопеременную БП. Для формирования нужных ЛРП требуются соответствующие минимальные полиномы элемента β, которые можно взять из таблиц в [5].

Табл. 2. Параметры ИТП над полями нечетной характеристики, $N \le 1893$

Tab. 2. Parameters of the perfect ternary sequences over odd characteristic fields, $N \le 1893$

q	n	N	ν
3	3	13	1.444
3	5	121	1.494
3	7	1093	1.499
5	3	31	1.240
5	5	781	1.250
7	3	57	1.163
$9 = 3^2$	3	91	1.123
11	1	133	1.099
13	3	183	1.082
17	3	307	1.062
19	3	381	1.055
23	3	553	1.045
$25 = 5^2$	3	651	1.042
$27 = 3^3$	3	757	1.038
29	3	871	1.036
31	3	993	1.033
37	3	1407	1.028
41	3	1723	1.025
43	3	1893	1.024

Как показывает (10), выбрав соответствующий порядок основного поля, нетрудно построить ИТП с приемлемо низким значением пик-фактора, что иллюстрируется данными табл. 2, содержащей параметры ИТП рассмотренного типа с длинами в пределах $N \le 1893$. За тремя исключениями ИТП из таблицы отвечают минимальной степени расширения основного поля (эквивалентно памяти регистра, генерирующего ЛРП) $n = 3$. Не составляет труда показать, что любая из них оптимальна по критерию минимума пик-фактора, т. е. никакая ИТП той же длины не может обладать меньшим значением ν.

В развитие приведенных результатов вскоре после опубликования [23] было установлено существование альтернативного (9), (11) алгоритма, генерирующего ИТП с теми же значениями длины и пик-фактора, но отличающиеся внутренней структурой. Первая его версия была описана в [24] для частного, но наиболее важного случая $n = 3$. Впоследствии Б. Ж. Камалетдиновым [1] эта конструкция на основе теории

[1] Камалетдинов Белал Жафярович (1957–2002). С 1980 по 1995 гг. инженер, аспирант, доцент кафедры радиосистем ЛЭТИ, активный участник научно-исследовательских проектов кафедры, автор ряда оригинальных идей и публикаций в области теории сигналов.

квадратичных форм над конечными полями была обобщена для произвольных нечетных *n* [25].

Обращает на себя внимание тот факт, что в зарубежных книгах и статьях последовательности из [23] неизменно фигурируют в сочетании с фамилией автора названной публикации [26–31], что свидетельствует о признании приоритета школы ЛЭТИ в части синтеза регулярных ИТП. Ряд ссылок свидетельствует также об использовании ИТП (9) в разнообразных приложениях: от стандарта персональной связи IEEE 802.15.4z [32, 33] до систем инструментальных акустических измерений [34].

В попытках расширить каталог длин, при которых существуют регулярные ИТП, сотрудники исследовательского коллектива заметили, что последовательности с параметрами (10) можно построить и для полей характеристики $p = 2$, однако в выводе аналитической версии соответствующего алгоритма их опередили авторы [30], доказавшие продуктивность в этом отношении такого инструмента, как двоичные квадратичные формы. Компактный вариант правила формирования ИТП подобного типа, приведенный в [5], дается равенством

$$a_i = \begin{cases} e\left[d_i \operatorname{tr}^{q-3}\left(\xi^i\right)\right], \operatorname{tr}\left(\xi^i\right) \neq 0; \\ 0, \ \operatorname{tr}\left(\xi^i\right) = 0; \end{cases} \qquad (12)$$
$$i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$$

в котором d_i – символы q-ичной последовательности:

$$d_i = \begin{cases} \sum_{t=1}^{(n-1)/4} \operatorname{tr} \xi^{[q^{(8t-1)k}+1]i}, \ n \equiv 1 \bmod 4; \\ \sum_{t=0}^{(n-3)/4} \operatorname{tr} \xi^{[q^{(8t+1)k}+1]i}, \ n \equiv 3 \bmod 4; \end{cases}$$
$$i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$$

где k – натуральное число, взаимно простое с n; $q = 2^w$; $e(x) = \exp\left[j\pi \operatorname{tr}_0(x)\right]$ – двузначный характер аддитивной группы поля $GF(2^n)$; $\operatorname{tr}_0(y)$ – след элемента $y \in GF(2^n)$ в простом поле $GF(2)$, а остальные обозначения соответствуют прежним. Параметры ИТП (12) приведены в табл. 3.

Табл. 3. Параметры ИТП над полями четной характеристики, $N \le 1057$

Tab. 3. Parameters of the perfect ternary sequences over even characteristic fields, $N \le 1057$

q	n	N	ν
$4 = 2^2$	3	21	1.313
$4 = 2^2$	5	341	1.332
$8 = 2^3$	3	73	1.141
$16 = 2^4$	3	273	1.066
$32 = 2^5$	3	1057	1.032

Как и в случае БП, перечень привлекательных ИТП можно существенно расширить за счет добавления составных ИТП, полученных поэлементным перемножением имеющихся ИТП. Если периоды объединяемых компонент N_1 и N_2 взаимно просты, ПАКФ составной последовательности будет равна произведению компонентных ПАКФ [5, 35], т. е. при идеальности последних окажется также идеальной.

Табл. 4. Параметры составных ИТП при $N_2 = 4$

Tab. 4. Parameters of composite ternary sequences with $N_2 = 4$

N	N_1	ν
52	13	1.444
84	21	1.313
124	31	1.240
228	57	1.163
292	73	1.141
364	91	1.123
484	121	1.494
532	133	1.099
732	183	1.082
1092	273	1.066
1228	307	1.062
1364	341	1.332
1524	381	1.055

При этом для периода N и пик-фактора ν составной ИТП справедливы соотношения $N = N_1 N_2$ и $\nu = \nu_1 \nu_2$, где ν_i $(i = 1, 2)$ – пик-фактор i-й компоненты. Поскольку периоды всех описанных выше ИТП нечетны, они, очевидно, взаимно просты с длиной единственной БП с идеальной ПАКФ $N_2 = 4$, означая, что любую из ИТП табл. 2 и 3 можно посимвольно перемножить с БП $+++-$, увеличив длину ИТП вчетверо и сохранив идеальность ПАКФ и прежний пик-фактор. Параметры ИТП, получаемых таким способом, приведены в табл. 4.

Ансамбли сигнатур для многопользовательских систем с кодовым разделением. Системы с кодовым разделением (CDMA – Code Division Multiple Access) составляют обширный сегмент в номенклатуре современных беспроводных телекоммуникаций, интегрируя в себе все популярные преимущества широкополосной системотехники. В большинстве CDMA-сетей используется технология прямого расширения спектра, в рамках которой символы передаваемого сообщения умножаются на дискретный сигнал (сигнатуру), составленный из чипов, частота следования которых значительно выше скорости передачи данных, так что полоса, занимаемая результирующим сигналом, многократно шире полосы исходного сообщения [1–3]. При этом для K абонентов, одновременно присутствующих в сети, сигнатуры должны существенно отличаться друг от друга, чтобы приемная сторона могла надежно распознать сигнал нужного передатчика на фоне не только естественного шума, но и помехи множественного доступа (ПМД), образованной $K-1$ "сторонними" сигналами. Хотя на уровень ПМД для сигнатурного ансамбля объема K влияют не только периодические, но и так называемые нечетные взаимные корреляции [36, 37], зависящие от апериодических ВКФ (3), первоочередной критерий приемлемости ансамбля традиционно связывают с максимальным выбросом периодических ВКФ

$$\rho_{\max}^{\mathrm{c}} = \max_{\substack{k,\, l=1,\dots,K \\ m}} \left|\rho_{kl}(m)\right|, \qquad (13)$$

где у нормированной периодической ВКФ

$$\rho_{kl}(m) = \frac{R_{\mathrm{p},\,kl}(m)}{\sqrt{R_{kk}(0)\,R_{ll}(0)}}$$

индекс p для краткости опущен, поскольку апериодические ВКФ далее не рассматриваются. Так как уровень боковых выбросов АКФ также должен контролироваться, наряду с (13) при выборе сигнатурного ансамбля следует учитывать и максимум автокорреляционного бокового лепестка

$$\rho_{\max}^{\mathrm{a}} = \max_{\substack{k=1,\dots,K, \\ m}} \left|\rho_{kk}(l)\right|. \qquad (14)$$

Максимизация по m в (13) должна осуществляться в пределах множества возможных взаимных задержек абонентских сигналов, тогда как в (14) множество возможных m определяется диапазоном рассеяния по времени канала распространения, зоной априорной неопределенности времени прихода сигнала и т. д. Что касается ПМД, иначе говоря, показателя (13), все реальные сценарии можно считать промежуточными по отношению к двум крайним, отвечающим синхронному и асинхронному вариантам CDMA. В первом из них сигнатуры синхронизированы, т. е. их взаимные задержки равны нулю, так что в (13) $m = 0$ и максимизация по m не требуется. Подобная модель адекватно описывает, к примеру, линию "вниз" в мобильной связи 2G- и 3G-стандартов CDMA, где все K сигнатур излучаются общей антенной. В противовес этому при асинхронном кодовом разделении полагается, что взаимные задержки сигнатур равновероятно принимают любые значения в пределах их общего периода и в (13) $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Эта ситуация характерна для канала "вверх" системы мобильной связи, поскольку расстояния мобильных передатчиков от базовой станции случайны и меняются со временем.

При синхронном кодовом уплотнении без перенасыщения $(K \le N)$ ПМД полностью устраняется выбором ортогонального ансамбля сигнатур $\left(\rho_{\max}^{\mathrm{c}} = 0\right)$. В асинхронном же случае ортогональность сигнатур при произвольных циклических сдвигах в принципе возможна, однако лишь в обмен на высокий уровень боковых лепестков ПАКФ. В итоге из двух рассмотренных режимов асинхронный предъявляет к ансамблю сигнатур гораздо более жесткие требования, часто объединяемые в минимаксный критерий, предписывающий минимизировать максимум любых нежелательных корреляций:

$$\rho_{\max} = \max\left\{\rho_{\max}^{\mathrm{c}}, \rho_{\max}^{\mathrm{a}}\right\}$$

в предположении, что множество возможных m в (13) и (14) есть $0, 1, \dots, N-1$ и $1, 2, \dots, N-1$ соответственно. Назовем величину $\rho_{\max}$ корреляционным пиком и обратимся к фундаментальной границе Велча [3, 5, 38], устанавливающей нижний предел $\rho_{\max}$ в ансамбле сигнатур объема K и длины N:

$$\rho_{\max} \ge \sqrt{\frac{K-1}{KN-1}}.$$

При больших объемах и длинах эта граница упрощается до асимптотической версии

$$\rho_{\max} \ge \frac{1}{\sqrt{N}}, K, N >> 1. \quad (15)$$

Если ограничить алфавит сигнатур бинарным $\{\pm 1\}$, точнее окажется асимптотическая граница Сидельникова [39]:

$$\rho_{\max} \ge \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}}, K \le \dfrac{N}{2}+1; \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, \ K > \dfrac{N}{2}+1. \end{cases} \quad (16)$$

Сигнатурные ансамбли, достигающие границ (15)–(16), естественно назвать минимаксными. До конца 80-х были известны минимаксные бинарные ансамбли Касами, Голда и бент-функций [5], а также несколько других, отличающихся от названных лишь внутренней структурой БП, но не их длиной и корреляционным пиком. Параметры этих ансамблей перечислены в первых трех строках табл. 5. Как видно, ансамбли Касами и бент-функций лежат на границе Велча, тогда как ансамбль Голда – на границе Сидельникова. Одновременно примечателен и следующий факт. Хотя граница Сидельникова не исключает существования бинарных ансамблей с корреляционным пиком примерно $1/\sqrt{N}$ вплоть до объемов, близких к $N/2$, объем семейств Касами и бент-функций многократно меньше последней величины. Многие годы вопрос о том, существуют ли бинарные ансамбли, у которых при

$$\rho_{\max} \approx 1/\sqrt{N} \quad (17)$$

объем существенно превышает $\sqrt{N}$, оставался открытым. Окончательный ответ на него был дан в работе А. А. Нечаева [40], доказавшего, что бинарный ансамбль Кердока обладает объемом порядка половины длины в сочетании с оговоренным выше значением корреляционного пика. Поскольку названная статья увидела свет лишь в конце 1989 г., понятен интерес, с которым была встречена работа Б. Ж. Камалетдинова [41], опубликованная в начале 1988 г., где было установлено, что при объединении ансамблей Касами и бент-функций (четвертая строка табл. 5) объем результирующего ансамбля практически удваивается без увеличения корреляционного пика. На тот момент синтезированный таким образом ансамбль имел рекордно большой объем при ограничении (17).

Табл. 5. Параметры минимаксных бинарных ансамблей

Tab. 5. Parameters of the minimax binary sets

Ансамбль	Длина N	Объем K	Корреляционный пик $\rho_{\max}$
Касами	2^n-1, $n \equiv 0 \bmod 2$	$\sqrt{N+1}$	$\frac{\sqrt{N+1}+1}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$
Голд	2^n-1, $n \equiv 1 \bmod 2$	$N+2$	$\frac{\sqrt{2(N+1)}+1}{N} \to \sqrt{\frac{2}{N}}$
Бент-функции	2^n-1, $n \equiv 0 \bmod 4$	$\sqrt{N+1}$	$\frac{\sqrt{N+1}+1}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$
Касами + бент	2^n-1, $n \equiv 0 \bmod 4$	$2\sqrt{N+1}-1$	$\frac{\sqrt{N+1}+1}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$
Камалетдинов-1	$p(p-1)$, p – простое	$\frac{\sqrt{4N+1}+3}{2} \to \sqrt{N}$	$\frac{p+3}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$
Камалетдинов-2	$p(p+1)$, p – простое	$\frac{\sqrt{4N+1}-3}{2} \to \sqrt{N}$	$\frac{p+1}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$
Кердок	$2(2^n-1)$, $n \equiv 1 \bmod 2$	$\frac{N}{2}+1$	$\frac{\sqrt{N+2}+2}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}}$

Не менее интересны и результаты, полученные тем же автором в части синтеза нетривиально новых минимаксных ансамблей [42]. Как показывают первые 4 строки табл. 5, известные до появления работы [40] минимаксные множества имели длины, задаваемые шаблоном $N = 2^n - 1 = 15, 31, 63, \ldots,$ что неудивительно, поскольку все они строятся на базе полей характеристики два. Оригинальные правила, предложенные в [42], базируются на полях нечетной характеристики, давая новый набор длин N, выходящий за рамки прежнего шаблона. Первое из названных правил в наиболее наглядной форме можно описать следующим образом [3]. Пусть $GF(p)$ – простое поле Галуа нечетного порядка $p = 4h + 3$, где h – натуральное. Образуем $K = p + 1$ p-ичных последовательностей

$$d_{k,i} = \begin{cases} i + \alpha^{i+k} + \alpha^{-i}, \ k = 1, 2, \ldots, p-1; \\ i + \alpha^{i}, \ k = p; \\ i + \alpha^{-i}, \ k = p+1, \end{cases} \tag{18}$$

где все действия выполняются согласно арифметике поля $GF(p)$; α – примитивный элемент $GF(p)$, а $i = \ldots -1, 0, 1, \ldots$. Как нетрудно видеть, период этих последовательностей $N = p(p-1)$. Если заменить ненулевые элементы последовательностей (18) на их характеры, а нулевые – на плюс единицу (замена на –1 даст тот же результат):

$$a_{k,i} = \begin{cases} \psi(d_{k,i}), \ d_{k,i} \ne 0; \\ 1, \ d_{k,i} = 0; \end{cases} \tag{19}$$
$$k = 1, 2, \ldots, p = 1, i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$$

результирующий бинарный ансамбль, как показано в [42], будет обладать корреляционным пиком

$$\rho_{\max} = \frac{p+3}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}},$$

т. е. окажется минимаксным.

Остановимся теперь на второй введенной в [42] схеме, представленной в несколько модифицированной версии из [3]. Пусть $GF(p)$, как и прежде, простое поле порядка $p = 4h + 3$, где h – неотрицательное целое. Расширим это поле до $GF(p^2)$ и образуем $K = p - 1$ p-ичных последовательностей

$$d_{k,i} = i + \mathrm{tr}\left[\alpha^{(p-1)i+k}\right]; \quad k = 1, 2, \ldots, K, \ i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

где α – примитивный элемент расширенного поля, а $\mathrm{tr}(x)$ – след элемента x поля $GF(p^2)$ в исходном поле $GF(p)$, после чего отобразим элементы последовательностей (20) на двоичный алфавит согласно (19). Период и корреляционный пик полученного таким образом бинарного ансамбля составят [42]

$$N = p(p+1); \ \rho_{\max} = \frac{p+1}{N} \to \frac{1}{\sqrt{N}},$$

что относит и этот ансамбль к разряду минимаксных.

После учета семейств Камалетдинова и Кердока табл. 5 по существу исчерпывает перечень представителей минимаксных бинарных ансамблей. Другие ансамбли, упоминания о которых можно встретить в литературе, остались за пределами таблицы, так как их специфика заключается лишь в структуре последовательностей, но не в ключевых параметрах N, K и $\rho_{\max}$. Отмеченная выше уникальность ансамблей Кердока, состоящая в том, что для них минимакс корреляционного пика достигается при объеме, многократно превышающем объем других ансамблей с тем же уровнем $\rho_{\max}$, разумеется, весьма привлекательна в плане потенциальных приложений. С другой стороны, математический базис ансамблей Кердока непривычен для проектировщика-инженера, поскольку опирается не на поля Галуа, а на расширения кольца $\mathbf{Z}_4$, т. е. множества $\{0, 1, 2, 3\}$ со сложением и умножением по модулю 4. Теория подобных расширений (колец Галуа) [40] достаточно сложна и нуждается в общедоступных интерпретациях. С этой целью специалистами презентуемого коллектива была опубликована работа [43], содержащая описание практической структуры генератора последовательностей Кердока, а также таблицы характеристических полиномов, необходимых для построения входящего в нее четверичного регистра с обратной связью.

В завершение коснемся еще одной задачи, относящейся к перенасыщенному синхронному кодовому уплотнению. Как отмечалось, задача выбора сигнатур для синхронного варианта CDMA в отсутствие перенасыщения $(K \le N)$ имеет довольно тривиальное решение, сводящееся к использованию ортогонального ансамбля. В то же время естественное стремление повысить скорость надежной передачи данных стимулирует интерес к перенасыщенным системам. В случае $K > N$ оптимальный прием по минимуму расстояния не сводится к вычислению корреляций принятого колебания с сигнатурой, так что при выборе сигнатурного ансамбля более уместно требование не минимума корреляционного пика, а максимума минимального расстояния между возможными групповыми сигналами всех K пользователей. Как показано в [3], при $K \le 4N/3$ существует созвездие сигнатур, для которого указанное минимальное расстояние остается тем же, что и для ортогональных сигнатур, т. е. при $K \le N$. Алгоритм построения бинарного ансамбля подобного типа был описан в [44].

Заключение. В предлагаемом обзоре автор попытался в сжатой форме представить итоги многолетних исследований творческой группы кафедры радиосистем ЛЭТИ в области синтеза дискретных широкополосных сигналов с оптимальными метрическими характеристиками. Обсуждение фокусировалось на актуальных задачах синтеза последовательностей с идеальными или близкими к идеальным автокорреляционными свойствами, а также кодовых ансамблей, обеспечивающих малый уровень помех множественного доступа в CDMA-сетях. Из-за необходимости соблюдения норм приемлемого объема в материале не нашли отражения публикации, посвященные более частным вопросам, детализации результатов и реализационно-технологическим аспектам, а также статьи в ведомственных изданиях и доклады на отраслевых конференциях. В целом хотелось бы надеяться, что обзор привлечет внимание специалистов, причастных к инфокоммуникационной проблематике.

Список литературы

1. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.

2. Прокис Дж. Цифровая связь / пер. с англ. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

3. Ипатов В. П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения / пер. с англ. М.: Техносфера, 2007. 488 с.

4. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.

5. Ипатов В. П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 152 с.

6. Baumert L. D. Cyclic difference sets. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer Verlag, 1971.

7. Schmidt B. Cyclotomic integers and finite geometry // J. Am. Math. Soc. 1999. Vol. 12. P. 929–952. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00298-2

8. Leung K. H., Schmidt B. The field descent method // Des. Codes Cryptogr. 2005. Vol. 36. P. 171–188. doi: 10.1007/s10623-004-1703-7

9. Leung K. H., Schmidt B. The anti-field-descent method // J. Comb. Theory Ser. A. 2016. Vol. 139. P. 87–131. doi: 10.1016/j.jcta.2015.11.005

10. Ипатов В. П. Полное подавление боковых лепестков периодических корреляционных функций фазоманипулированных сигналов // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 8. С. 1600–1606.

11. Ипатов В. П. Выбор пары периодический фазоманипулированный сигнал-фильтр // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1978. Т. 21, № 4. С. 60–67.

12. Ипатов В. П. О фильтрах подавления боковых лепестков периодических фазоманипулированных сигналов // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 11. С. 2442–2445.

13. Ипатов В. П. Синтез пары бинарный периодический сигнал-фильтр // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1980. Т. 23, № 4. С. 56–61.

14. Ипатов В. П. Бинарные периодические последовательности с малыми потерями на подавление боковых лепестков // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1980. Т. 23, № 1. С. 20–25.

15. Ипатов В. П., Федоров Б. В. Регулярные бинарные последовательности с малыми потерями на подавление боковых лепестков // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27, № 3. С. 29–34.

16. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля / пер. с англ. М.: Мир, 1988. 430 с.

17. Холл М. Комбинаторика / пер. с англ. М.: Мир, 1970. 440 с.

18. Ипатов В. П., Коломенский Ю. А., Корниевский В. И. Использование зингеровых кодов в многолучевых каналах измерения дальности // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 3. С. 520–525.

19. Levanon N, Mozeson E. Radar signals. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 403 p.

20. Levanon N. New waveform design for magnetron-based marine radar // IET Radar, Sonar and Navigation. 2009. Vol. 3. P. 530–540. doi: 10.1049/iet-rsn.2009.0007

21. Levanon N., Ben-Yaakov E., Quartler D. New results for magnetron marine radar – experimental results // IET Radar, Sonar and Navigation. 2012. Vol. 6. P. 1–8.

22. Кренгель Е. И. Ретроспективный обзор троичных последовательностей с идеальной периодической автокорреляцией и устройств их генерации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2019. Т. 22, № 4. С. 6–17. doi: 10.32603/1993-8985-2019-22-4-6-17

23. Ипатов В. П. Троичные последовательности с идеальными периодическими корреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 10. С. 2053–2057.

24. Ипатов В. П., Платонов В. Д., Самойлов И. М. Новый класс троичных последовательностей с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Изв. вузов СССР. Математика. 1983. № 3. С. 47–50.

25. Камалетдинов Б. Ж. Троичные последовательности с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 1. С. 77–82.

26. Fan P., Darnell M. Sequence design for communications Applications. London: Research Studies Press Ltd, 1996. 493 p.

27. Martin R., Heute U., Antweiler C. Advances in digital speech transmission. New Jersey: John Wiley & Sons, Ltd, 2008. 571 p.

28. Jungnickel D., Pott A. Perfect and almost perfect sequences // Discrete applied mathematics. 1999. Vol. 95. P. 331–359. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00085-2

29. Aiello R., Batra A. Ultra Wideband Systems. Newnes, 2006. 323 p. doi: 10.1016/B978-0-7506-7893-3.X5000-7

30. Hoholdt T., Justesen J. Ternary sequences with perfect periodic autocorrelation // IEEE Trans., Inf. Theory. 1983. Vol. 29. P. 597–600. doi: 10.1109/TIT.1983.1056707

31. Jackson W.-A., Wild P. R. Relations between two perfect ternary sequence constructions // Design, Codes and Cryptography. 1992. Vol. 2, iss. 4. P. 325–332. doi: 10.1007/BF00125201

32. Sedlacec P., Macek P, Slanina M. An Overview of the IEEE 802.15.4z standard and its Comparison to the Existing UWB Standards // 29th Intern. Conf. Radioelektronika. Pardubice, Czech Republic, 16–18 Apr. 2019. IEEE, 2019. P. 1–6. doi: 10.1109/RADIOELEK.2019.8733537

33. Алексеев В. Новый стандарт IEEE 802.15.4z // Беспроводные технологии. 2019. № 3. С. 22–26.

34. Sound-field measurement with moving microphones / F. Katzberg, R. Mazur, M. Maass, P. Koch, A. Mertins // J. Acoust. Soc. Am. 2017. № 5. P. 3220–3235. doi: 10.1121/1.4983093

35. Ипатов В. П. К теории троичных последовательностей с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 4. С. 723–727.

36. Pursley M., Sarwate D. Performance Evaluation for phase-coded spread-spectrum multiple-access communication – Part II: code sequence analysis communications // IEEE Trans. Commun. 1977. Vol. 25. P. 800–803. doi: 10.1109/TCOM.1977.1093916

37. Lahtonen J. On the odd and aperiodic correlation properties of the Kasami sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 1995. Vol. 41. P. 1506–1508. doi: 10.1109/18.412698

38. Welch L. R. Lower bound on the maximum cross-correlation of signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. Vol. 20. P. 397–399. doi: 10.1109/TIT.1974.1055219

39. Сидельников В. М. О взаимной корреляции последовательностей // Проблемы кибернетики. 1971. № 24. С. 15–42.

40. Нечаев А. А. Код Кердока в циклической форме // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 4. С. 123–139.

41. Камалетдинов Б. Ж. Оптимальный ансамбль бинарных последовательностей на основе объединения ансамблей последовательностей Касами и бент-функций // Проблемы передачи информации. 1988. Т. 23, № 2. С. 104–107.

42. Камалетдинов Б. Ж. Оптимальные множества бинарных последовательностей // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, № 2. С. 39–44.

43. Минимаксные ансамбли последовательностей Кердока / С. Б. Болошин, Д. В. Гайворонский, В. П. Ипатов, И. М. Самойлов, Б. В. Шебшаевич // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, № 5. С. 633–640.

44. Paavola J., Ipatov V. Binary CDMA signatures for *N*+*M* users in N-dimensional global signal space // Electron. Let. 2003. Vol. 39. P. 738–740.

Информация об авторе

Ипатов Валерий Павлович – доктор технических наук (1983), профессор (1985) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Заслуженный деятель науки РФ (2001), почетный радист СССР (1983). Автор более 300 научных работ. Сфера научных интересов – радиоэлектронная системотехника; статистическая теория связи; широкополосные системы радиолокации, радионавигации и передачи данных; теория сигналов.
Адрес: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5 Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия
E-mail: vpipatov@etu.ru

References

1. Varakin L. E. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Spread Spectrum Communication Systems]. Moscow, *Radio i svyaz'*, 1985, 384 p. (In Russ.)

2. Proakis J. Digital communications. 4th ed. McGrawhill, 2001, 1024 p.

3. Ipatov V. P. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov. Printsipy i prilozheniya* [Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications]. Moscow, *Tekhnosfera*, 2007, 488 p. (In Russ.)

4. Sverlik M. B. *Optimal'nye diskretnye signaly* [Optimal Discrete Signals]. Moscow, *Sov. radio*, 1975, 208 p. (In Russ.)

5. Ipatov V. P. *Periodicheskie diskretnye signaly s optimal'nymi korrelyatsionnymi svoistvami* [Periodic Discrete Signals with Optimal Correlation Properties]. Moscow, *Radio i svyaz'*, 1992, 152 p. (In Russ.)

6. Baumert L. D. Cyclic Difference Sets. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Springer Verlag, 1971.

7. Schmidt B. Cyclotomic Integers and Finite Geometry. J. Am. Math. Soc. 1999, vol. 12, pp. 929–952. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00298-2

8. Leung K. H., Schmidt B. The Field Descent Method. Des. Codes Cryptogr. 2005, vol. 36, pp. 171–188. doi: 10.1007/s10623-004-1703-7

9. Leung K. H., Schmidt B. The Anti-Field-Descent Method. J. Comb. Theory Ser. A. 2016, vol. 139, pp. 87–131. doi: 10.1016/j.jcta.2015.11.005

10. Ipatov V. P. Total Suppression of Sidelobes of Periodic Correlation Functions of Phase Manipulated Signals. Radio Eng. Elect. Physics. 1977, vol. 22, no. 8, pp. 42–47.

11. Ipatov V. P. Choice of Periodical PSK Signal And Filter Combination. Radioelectron. and Commun. Syst. (Radioelectonika). 1978, vol. 23, no. 4, pp. 49–55.

12. Ipatov V. P. On the Filters Suppressing Sidelobes of Periodic PSK Signals. Radio Eng. Elect. Physics. 1978, vol. 23, no. 11, pp. 2442–2445. (In Russ.)

13. Ipatov V. P. Synthesis of a Binary Periodic Signal Filter Pair. Radioelectron. and Commun. Syst. (*Radioelectonika*). 1980, vol. 23, no. 4, pp. 46–51.

14. Ipatov V. P. Binary Periodic Sequences With Low Sidelobe Suppression Loss. Radioelectron. and Commun. Syst. (*Radioelectonika*). 1980, vol. 23, no. 1, pp. 15–19.

15. Ipatov V. P., Fedorov B. V. Regular Binary Sequences with Low Losses In Suppressing Sidelobes. Radioelectron. and Commun. Syst. (*Radioelectonika*). 1984, vol. 27, no. 3, pp. 29–33. (In Russ.)

16. Lidl R., Niederreiter H. Finite Fields. Addison-Wesley, 1983, 755 p.

17. Hall M. Combinatorial Theory. Blaisdell Publishing Company, 1967.

18. Ipatov V. P., Kolomenskii Yu. A., Kornievskii V. I. Use of Singer Codes in Multibeam Range Measurement Channels. Radio Eng. Elect. Physics. 1979, vol. 24, no. 3, pp. 53–58.

19. Levanon N, Mozeson E. Radar Signals. New Jersey, John Wiley & Sons, 2004, 403 p.

20. Levanon N. New waveform design for magnetron-based marine radar. IET Radar, Sonar and Navigation. 2009, vol. 3, pp. 530–540. doi: 10.1049/iet-rsn.2009.0007

21. Levanon N., Ben-Yaakov E., Quartler D. New Results for Magnetron Marine Radar – Experimental Results. IET Radar, Sonar and Navigation. 2012, vol. 6, pp. 1–8.

22. Krengel E. I. Retrospective Review of Perfect Ternary Sequences and Their Generators. J. of the Russian Universities. Radioelectronics. 2019, vol. 22, no. 4, pp. 6–17. doi: 10.32603/1993-8985-2019-22-4-6-17

23. Ipatov V. P. Ternary Sequences with Ideal Periodic Autocorrelation Properties. Radio Eng. Elect. Physics. 1979, vol. 24, no. 10, pp. 75–79.

24. Ipatov V. P., Platonov V. D., Samoilov I. M. The New Class of Perfect Ternary Sequences. Russian Universities. Mathematics. 1983, no. 4, pp. 47–50.

25. Kamaletdinov B. Zh. Ternary sequences with ideal periodic autocorrelation properties. Sov. J. Commun. Technol. Electron. 1987, vol. 4, pp. 157–162.

26. Fan P., Darnell M. Sequence Design for Communications Applications. London, Research Studies Press Ltd, 1996, 493 p.

27. Martin R., Heute U., Antweiler C. Advances in Digital Speech Transmission. New Jersey, John Wiley & Sons, Ltd, 2008, 571 p.

28. Jungnickel D., Pott A. Perfect and Almost Perfect Sequences. Discrete Applied Mathematics. 1999, vol. 95, pp. 331–359. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00085-2

29. Aiello R, Batra A. Ultra Wideband Systems. Newnes, 2006, 323 p. doi: 10.1016/B978-0-7506-7893-3.X5000-7

30. Hoholdt T., Justesen J. Ternary Sequences with Perfect Periodic Autocorrelation. IEEE Trans., Inf. Theory. 1983, vol. 29, pp. 597–600. doi: 10.1109/TIT.1983.1056707

31. Jackson W.-A., Wild P. R. Relations between Two Perfect Ternary Sequence Constructions. Design, Codes and Cryptography. 1992, vol. 2, iss. 4, pp. 325–332. doi: 10.1007/BF00125201

32. Sedlacec P., Macek P, Slanina M. An Overview of the IEEE 802.15.4z Standard and its Comparison to the Existing UWB Standards. 29th Intern. Conf. Radioelektronika. Pardubice, Czech Republic, 16–18 April 2019. IEEE, 2019, pp. 1–6. doi: 10.1109/RADIOELEK.2019.8733537

33. Alekseev V. The New Mobile Standard IEEE 802.15.4z. Wireless Technologies. 2019, no. 3, pp. 22–26. (In Russ.)

34. Katzberg F., Mazur R., Maass M., Koch P., Mertins A. Sound-Field Measurement with Moving Microphones. J. Acoust. Soc. Am. 2017, no. 5, pp. 3220–3235. doi: 10.1121/1.4983093

35. Ipatov V. P. Contribution to the Theory of Sequences with Perfect Periodic Autocorrelation Properties. Radio Eng. Elect. Physics. 1980, vol. 25, no. 4, pp. 31–34.

36. Pursley M., Sarwate D. Performance Evaluation for Phase-Coded Spread-Spectrum Multiple-Access Communication – Part II: Code Sequence Analysis Communications. IEEE Trans. Commun. 1977, vol. 25, pp. 800–803. doi: 10.1109/TCOM.1977.1093916

37. Lahtonen J. On the Odd and Aperiodic Correlation Properties of the Kasami Sequences. IEEE Trans. Inf. Theory. 1995, vol. 41, pp. 1506–1508. doi: 10.1109/18.412698

38. Welch L. R. Lower Bound on the Maximum Cross-Correlation Of Signals. IEEE Trans. Inform. Theory. 1974, vol. 20, pp. 397–399. doi: 10.1109/TIT.1974.1055219

39. Sidelnikov V. M. On Mutual Correlation of Sequences. Sovi. Math. Dokl. 1971, no. 12, pp. 197–201.

40. Nechaev A. A. Kerdock Code in a Cyclic Form. Discrete Math. Appl. 1989, vol. 1, no. 4, pp. 365–384.

41. Kamaletdinov B. Zh. An Optimal Ensemble of Binary Sequences Based on the Union of the Ensembles of Kasami and Bent-Function Sequences. Problems Inform. Transmission. 1988, vol. 24, no. 2, pp. 167–169.

42. Kamaletdinov B. Zh. Optimal Sets of Binary Sequences. Problems Inform. Transmission. 1996, vol. 32, no. 2, pp. 171–175.

43. Boloshin S. B., Gaivoronskii D. V., Ipatov V. P. et al. Minimax ensembles of Kerdock sequences. J. Commun. Technol. Electron. 2011, vol. 56, no. 5, pp. 590–597.

44. Paavola J., Ipatov V. Binary CDMA signatures for *N*+*M* users in N-dimensional global signal space. Electron. Let. 2003, vol. 39, pp. 738–740.

Information about the author

Valery P. Ipatov, Dr Sci. (Eng.) (1983), Professor (1985) of Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University. Honored scientist of the RF (2001), honorable radioman of the USSR (1983). The author of more than 300 scientific publications. Area of expertise: radio-electronic system engineering; statistical communication theory; broadband radar, navigation and data systems; signal theory.
Address: Saint Petersburg Electrotechnical University, 5 F, Professor Popov St., St Petersburg 197022, Russia
E-mail: vpipatov@etu.ru