

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головков В. А. Характеристики прогнозирующих фильтров // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2010. Вып. 2. С. 3–8.
2. Головков В. А. Интерполяция случайных процессов с использованием фильтрации Винера–Хопфа // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2009. Т. 52, № 3–4. С. 29–36.
3. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
4. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайного процесса. М.: Наука, 1987. 450 с.
5. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 2000. 462 с.
6. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990. 272 с.
7. Головков В. А., Бодренко Ж. Е. Выбор параметров фильтров предсказания случайных процессов // Радиотехника. 1997. № 4. С. 32–33.
8. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.

V. A. Golovkov

JSC "Science research Institute of opto-electronic instrumentation" (Sosnovy Bor t.)

Models of Random Processes and Their Particular Application in the Optimum Linear Interpolation and Forecasting

Models of correlation functions of random processes are considered. Numerical methods show that efficiency of the optimum linear interpolation and forecasting is defined by higher derivative of random processes. The results of numerical calculations of the interpolation and forecasting efficiency of random processes differentiated finitely many with some correlation function at Wiener filtration are given.

Random process, differentiability, Wiener–Hopf filter, forecasting, interpolation

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2016 г.

УДК 621.391; 519.254

Д. М. Клионский, А. М. Голубков, Д. И. Каплун, М. С. Куприянов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Исследование алгоритмов адаптации для обработки гидроакустических сигналов¹

Рассмотрены адаптивные алгоритмы обработки сигналов антенных решеток в режиме реального времени с линейными ограничениями в приложении к задачам гидроакустики. Приведены результаты анализа указанных алгоритмов и их сравнительные характеристики. Даны рекомендации по использованию алгоритмов.

Алгоритм адаптации, гидроакустический сигнал, антенная решетка, процессор

Задача обработки сигналов антенных решеток. Сигнал, проходя через среду, искажается этой средой и смешивается с другими сигналами, в частности с шумами. В результате полезный сигнал поступает на приемник искаженным и зашумленным. При обработке такого сигнала задача адаптивного алгоритма состоит в оценивании его полезной составляющей с максимально возможной точностью. Другими словами, необходи-

мо достигнуть минимума среднеквадратической ошибки оценивания полезного сигнала за минимальное количество шагов адаптации.

В настоящей статье рассмотрены алгоритмы обработки, ориентированные на антенные решетки (АР) с большим количеством чувствительных элементов. Такие АР применяются на подводных лодках, надводных кораблях, станциях раннего обнаружения сейсмической активности. В настоящей статье алгоритмы адаптивной фильтрации

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (договор № 02.G25.31.0149 от 01.12.2015 г.).

исследованы в приложении к задаче оценивания полезного гидроакустического сигнала.

В настоящее время отмечается значительный интерес к вопросам обработки сигналов, принятых с помощью АР, особенно в сейсмологии и гидролокации, что привело к исследованиям различных видов оптимальных фильтров для решения данных задач. В целях удобства и обеспечения универсальности при программно-аппаратной реализации такого рода фильтров широкое применение получило их предварительное моделирование в программных системах (MATLAB, LabView, Simulink и пр.). На вход модели поступает ряд временных выборок от каждого из элементов антенны. Формируемый выходной сигнал решетки представляет собой взвешенную сумму всех выборок. На рис. 1 представлена структурная схема процессора обработки сигналов, получаемых с элементов решетки.

Рассматриваемые алгоритмы пригодны для задач обработки сигналов в геофизических и радиолокационных АР, а также в преобразователях гидроакустических станций, когда требуется простыми средствами в реальном времени подавить шумы, проникающие по боковым лепесткам диаграммы направленности. В задачах гидроакустики алгоритмы адаптации [1] позволяют выделить полезный активный сигнал с заданного направления и подавить шумы от объектов с направлений, не совпадающих с заданным. Кроме того, изменяющиеся внешние условия (характеристики акватории, скорость движения объектов и пр.) требуют учета этих изменений, что частично обеспечивается рассмотренными далее алгоритмами адаптации.

Алгоритм адаптации на основе итерационной процедуры. Для большинства представляющих интерес критериев качества количество арифметических операций, необходимых для вычисления оптимальных значений весовых коэффициентов процессора, показанного на рис. 1, пропорционально третьей степени числа коэффициентов [2]. В связи с этим прямые вычисления коэффициентов сопряжены с серьезными трудностями, поскольку для вычисления в режиме реального времени коэффициентов оптимальных фильтров даже для решеток, содержащих не очень большое число элементов и отводов от них, требуются большие вычислительные мощности.

Далее рассмотрен метод, использующий адаптивную, т. е. итерационную процедуру для отыскания оптимального набора весовых коэффициентов. Для оценки качества выбран критерий среднего квадрата ошибки. Рассмотрен и исследован адаптивный алгоритм, минимизирующий данный критерий. Показано, что, хотя рассмотренная процедура и не обеспечивает оптимальных характеристик на каждом из циклов адаптации, в пределе, когда число шагов адаптации становится большим, она дает те же результаты, что и оптимальный процессор. Число арифметических операций и объем памяти, необходимые для реализации рассмотренной адаптивной процедуры, пропорциональны количеству весовых коэффициентов фильтра, что дает существенный выигрыш по сравнению с прямыми вычислениями.

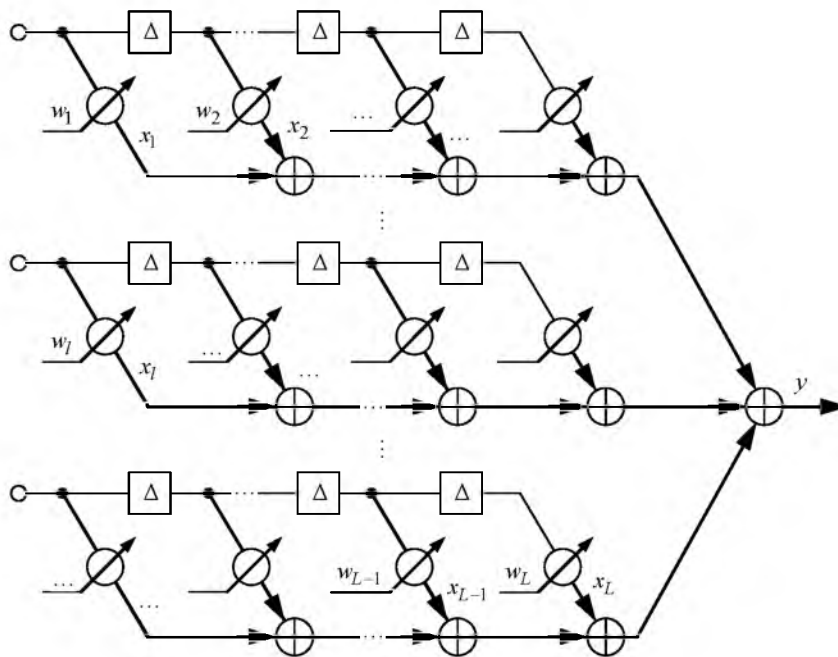


Рис. 1

Адаптивный алгоритм предназначен для извлечения одного определенного сигнала – сигнала от цели $g(k)$, – поступающего на АР ($k = 1, 2, \dots$ – дискретное время), при наличии многих других сигналов, которые рассматриваются как помехи. Моделями сигнала от цели и помех всех видов служат стационарные случайные процессы с нулевым средним значением. Пространственные характеристики сигнала, например направление прихода и спектральная плотность мощности, либо известны, либо оценены заранее с требуемой точностью. Предполагается, что помехи вызываются либо источником в среде, окружающей элементы решетки, либо генераторами шума в чувствительных элементах решетки (например, тепловым шумом усилителей), причем параметры поля помех известны.

Сигнал $g(k)$ принимается АР и преобразуется процессором (рис. 1). Размещение элементов АР в пространстве известно.

Процессор представляет собой несколько линий задержки с отводами. Интервал задержки между соседними отводами Δ . Сигналы, полученные с выводов линий задержки, умножаются на переменные весовые коэффициенты w_l , которые могут принимать бесконечное количество положительных или отрицательных значений. Результаты умножения суммируются набором сумматоров, формируя выходной сигнал процессора y . Задачей адаптации является установка значений весовых коэффициентов, обеспечивающих оптимальное по выбранному критерию значение выходного сигнала.

Суммированию подвергаются L сигналов $x_l(k)$, $l = \overline{1, L}$, полученных с выходов умножителей на коэффициенты $w_l(k)$. Перейдя к векторной форме записи, получим выходной сигнал в виде

$$y(k) = \mathbf{X}^T(k) \cdot \mathbf{W}(k),$$

где

$$\mathbf{X}(k) = [x_1(k) \dots x_l(k) \dots x_L(k)]$$

– вектор сигналов на отводах линий задержки;

$$\mathbf{W}(k) = [w_1(k) \dots w_l(k) \dots w_L(k)]^T$$

– вектор переменных весовых коэффициентов; "Т" – символ транспонирования.

Каждый из сигналов $x_l(k)$, соответствующих k -му циклу адаптации, представляет собой сумму:

$$x_l(k) = s_l(k) + n_l(k), \quad (1)$$

где

$$s_l(k) = F_l [g(k)] \quad (2)$$

– результат прохождения сигнала от цели через АР и l -ю ветвь процессора; $n_l(k)$ – результат воздействия всех источников помех, причем $F_l[\cdot]$ – функция преобразования входного сигнала $g(k)$ АР и l -й ветвью процессора.

В (1) и (2) учтено, что в результате настройки АР на известный с точностью до амплитудных параметров полезный сигнал на всех выходах АР составляющие полезного сигнала оказываются одинаковыми.

Примененный в исследуемом алгоритме критерий среднего квадрата ошибки описывается квадратичной функцией значений весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \{ [g(k) - y(k)]^2 \} = \\ &= E \{ g^2(k) \} - 2E \{ g(k)y(k) \} + E \{ y^2(k) \} = \\ &= E \{ g^2(k) \} - 2\mathbf{P}_g^T \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W}^T R_{XX}^{-1} \mathbf{W}, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}_g = E [g(k) \mathbf{X}(k)] = E [g(k) \mathbf{S}(k)]$$

– вектор корреляций между входным сигналом $g(k)$ и выходными сигналами каналов процессора $\mathbf{X}(k)$;

$$R_{XX} = E [\mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k)]$$

– корреляционная матрица сигналов на отводах линий задержки, причем

$$\mathbf{S}(k) = [s_1(k) \dots s_l(k) \dots s_L(k)].$$

Уравнению (3) соответствует единственный минимум σ^* [3], который достигается, когда весовой вектор равен \mathbf{W}^* . Так как поверхность ошибок не обладает локальными минимумами, для получения итерационных алгоритмов отыскания весов воспользуемся методами градиентного спуска. Одним из таких методов является метод наискорейшего спуска, согласно которому итерация весового вектора производится в направлении отрицательного градиента поверхности ошибок, т. е. посредством использования отрицательного градиента:

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu [\mathbf{P}_g - R_{XX} \mathbf{W}(k)], \quad (4)$$

где μ – скалярная константа, задающая шаг итерации.

Размер шага при каждом итерационном цикле регулируется скалярной константой. Можно по-

казать, что при надлежащем выборе μ повторное применение (4) приведет к тому, что предельное значение $\mathbf{W}(i)$ будет сходиться к оптимальному значению \mathbf{W}^* независимо от выбора начального весового вектора $\mathbf{W}(0)$.

Так как алгоритм наискорейшего спуска требует знания матрицы R_{XX} , он не может быть непосредственно применен к задачам, рассматриваемым в исследовании. Далее полученные по этому алгоритму результаты указаны для сравнения.

Метод градиентного спуска, при котором не требуется знание матрицы R_{XX} , детально описан в [3]. Согласно этому методу приращения весового вектора происходят в направлении отрицательного градиента мгновенного значения квадрата ошибки $\varepsilon^2(k)$. В результате алгоритм адаптации описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(k+1) &= \mathbf{W}(k) + \\ &+ \mu [g(k)\mathbf{X}(k) - \mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k) \cdot \mathbf{W}(k)] = \\ &= \mathbf{W}(k) + \mu [g(k) - y(k)]\mathbf{X}(k). \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнение (4) и (5) показывает, что метод градиентного спуска [3] получается из алгоритма наискорейшего спуска заменой средних значений R_{XX} и \mathbf{P}_g соответствующими мгновенными значениями.

При достаточно малом значении μ многократное применение (5) приводит к тому, что предельное значение среднего весового вектора

$$\mathbf{M}_w(k) = E[\mathbf{W}(k)] \quad (6)$$

сходится к оптимальному весовому вектору \mathbf{W}^* [3].

Алгоритм градиентного спуска позволяет преодолеть основную трудность, связанную с применением алгоритма наискорейшего спуска, поскольку при вычислениях не используется матрица R_{XX} . Однако сохраняется необходимость в каждом цикле адаптации, соответствующем (5), знать сигнал от цели $g(k)$. В рассматриваемой в исследовании задаче этот сигнал неизвестен.

Алгоритм, рассмотренный далее, представляет собой сочетание алгоритмов наискорейшего и градиентного спуска и записывается следующим образом:

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu [\mathbf{P}_g - \mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k) \cdot \mathbf{W}(k)]. \quad (7)$$

Данное выражение можно представить в виде

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu [\mathbf{P}_g - y(k)\mathbf{X}(k)]. \quad (8)$$

В этом методе используется комбинация средних и мгновенных значений величин. Его достоинством является то, что все члены алгоритма либо известны заранее (\mathbf{P}_g), либо получаются из данных посредством прямых измерений ($y(k)$ и $\mathbf{X}(k)$).

Уравнение (8) представляет собой алгоритм, предложенный для обработки данных больших AP в реальном времени. Весовой вектор $\mathbf{W}(k)$, получаемый в результате реализации итерационного алгоритма, является случайным. Для описания свойств сходимости весовых коэффициентов воспользуемся первым и вторым статистическими моментами $\mathbf{W}(k)$: средним весовым вектором $\mathbf{M}_w(k)$, весовой автокорреляционной матрицей $R_{ww}(k)$ и весовой ковариационной матрицей $C_{ww}(k)$. Эти величины являются функциями номера итерации k и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &- \mathbf{M}_w(k) - \text{соотношением (6);} \\ &- R_{ww}(k) = E[\mathbf{W}(k) \cdot \mathbf{W}^T(k)]; \\ &- C_{ww}(k) = \\ &= E\{[\mathbf{W}(k) - \mathbf{M}_w(k)][\mathbf{W}(k) - \mathbf{M}_w(k)]^T\} = \\ &= R_{ww}(k) - \mathbf{M}_w(k) \cdot \mathbf{M}_w^T(k). \end{aligned}$$

Условие наиболее сильной сходимости следующее [4]: для любого $\varepsilon > 0$ существует другое число μ_ε , такое, что если скалярная константа μ в (8) удовлетворяет условию $0 < \mu < \mu_\varepsilon$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E[\|\mathbf{W}(k) - \mathbf{W}^*\|] < \varepsilon. \quad (9)$$

Иными словами, подбором μ , удовлетворяющего (9), весовой вектор, получаемый в результате итерационного применения (8), может быть сделан произвольно близким к оптимальному вектору \mathbf{W}^* в смысле, определяемом условием (9). Основные допущения, принятые при доказательстве, заключаются в том, что векторы, получаемые в результате измерений $\mathbf{X}(k)$, являются эргодическими в смысле среднего квадрата и удовлетворяют некоторому условию асимптотической независимости [2].

Далее предполагается, что полученные при последовательных измерениях в AP векторы $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}(k+1)$, ... статистически не коррелированы и гауссовские. Приведенное допущение о структуре сигнала накладывает более строгие ограничения, чем изложенные ранее на основе

[2]. Тем не менее, оно должно быть справедливым в практических случаях, когда интервал времени между последовательными применениями алгоритма (8) велик по сравнению с интервалами корреляции результатов измерений.

В [5] показано, что если скалярная константа μ удовлетворяет неравенству

$$0 < \mu < 2/\lambda_{\max}, \quad (10)$$

где λ_{\max} – максимальное собственное значение корреляционной матрицы R_{XX} , то, когда количество адаптаций стремится к бесконечности, средний весовой вектор сходится как последовательность к \mathbf{W}^* .

Проектирование алгоритма. Одна из задач, связанных с применением алгоритма (8) в системах обработки данных реальных АР, заключается в выборе надлежащего значения скалярного коэффициента μ . Далее показано, каким образом выбор μ может быть связан с полной мощностью сигнала в решетке и как этот выбор влияет на скорость сходимости.

Верхнее граничное значение μ , определяемое (10), можно связать с полной мощностью сигнала в многоканальном фильтре. Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ матрицы R_{XX} связаны с ее следом $\text{tr}[R_{XX}]$ соотношением

$$\text{tr}[R_{XX}] = \sum_{l=1}^L \lambda_l. \quad (11)$$

Перепишав выражение (11), получим

$$\begin{aligned} \text{tr}[R_{XX}] &= \text{tr}\{\mathbb{E}[\mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k)]\} = \\ &= \mathbb{E}\{\text{tr}[\mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k)]\} = \\ &= \mathbb{E}\sum_{l=1}^L x_l^2(k) = \sum_{l=1}^L \mathbb{E}[x_l^2(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Правая часть этого выражения представляет собой сумму дисперсий сигналов, т. е. полную мощность сигналов в многоканальном фильтре. Комбинируя (11) и (12) получим

$$\sum_{l=1}^L \mathbb{E}[x_l^2(k)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l \geq \lambda_{\max}. \quad (13)$$

Последнее соотношение вытекает из того, что все собственные значения неотрицательны. Подстановкой (13) в (10) получим окончательный результат:

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{l=1}^L \mathbb{E}[x_l^2(k)]} \leq \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

Таким образом, сходимость алгоритма может гарантироваться измерением полной мощности сигнала в фильтре. В задачах большой размерности такое измерение может оказаться более простым, чем вычисление максимального собственного значения λ_{\max} .

Оценка скорости сходимости алгоритма.

Оценку скорости можно получить из рекуррентного соотношения для $\mathbf{M}_w(k)$. Определив математическое ожидание от обеих частей (7) и полагая, что последовательные выборки некоррелированы, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_w(k+1) &= \mathbf{M}_w(k) + \mu[\mathbf{P}_g - R_{XX}\mathbf{M}_w(k)] = \\ &= [I - \mu R_{XX}]\mathbf{M}_w(k) + \mu\mathbf{P}_g, \end{aligned}$$

где I – единичная матрица с размерами $L \times L$.

Для начального весового вектора $\mathbf{W}(0)$ среднее значение после k итераций

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_w(k) &= \\ &= (I - \mu R_{XX})^k \mathbf{W}(0) + \mu \sum_{i=0}^{k-1} (I - \mu R_{XX})^i \mathbf{P}_g = \\ &= (I - \mu R_{XX})^k [\mathbf{W}(0) - R_{XX}^{-1} \mathbf{P}_g] + R_{XX}^{-1} \mathbf{P}_g = \\ &= (I - \mu R_{XX})^k [\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*] + \mathbf{W}^*. \end{aligned} \quad (14)$$

Из полученного соотношения следует, что если μ удовлетворяет условию (10), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}_w(k) = \mathbf{W}^*.$$

Первый член (14) описывает переходный режим, связанный с начальными условиями. Пусть $\mathbf{V}(k)$ представляет собой переходный вектор:

$$\mathbf{V}(k) = (I - \mu R_{XX})^k [\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*].$$

Норма переходного вектора после k итераций

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(k)\|^2 &= \mathbf{V}^T(k) \cdot \mathbf{V}(k) = \\ &= [\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*]^T (I - \mu R_{XX})^{2k} [\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*] = \\ &= \|\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*\|^2 \text{tr}\{(I - \mu R_{XX})^{2k}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

а после $(k+1)$ итераций

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(k+1)\|^2 &= \|\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*\|^2 \text{tr}\{(I - \mu R_{XX})^{2k+2}\} \leq \\ &\leq \|\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*\|^2 |1 - \mu \lambda_{\min}|^2 \text{tr}\{(I - \mu R_{XX})^{2k}\} \geq \\ &\geq \|\mathbf{W}(0) - \mathbf{W}^*\|^2 |1 - \mu \lambda_{\max}|^2 \text{tr}\{(I - \mu R_{XX})^{2k}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Неравенства в (16) получены в [3]. Комбинируя (15) и (16) придем к неравенству для нормы переходного вектора:

$$|1 - \mu \lambda_{\max}| \leq \frac{\|\mathbf{V}(k+1)\|}{\|\mathbf{V}(k)\|} \leq |1 - \mu \lambda_{\min}|.$$

Если μ удовлетворяет неравенству (10), коэффициенты $|1 - \mu\lambda_{\max}|$ и $|1 - \mu\lambda_{\min}|$ должны быть меньше единицы, а поскольку $\lambda_{\max} \geq 0$ и $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$, то $|1 - \mu\lambda_{\max}| < 1$; $|1 - \mu\lambda_{\min}| < 1$.

Таким образом, длина переходного вектора в итерационном соотношении для среднего весового вектора уменьшается после каждой итерации не менее чем в $|1 - \mu\lambda_{\min}|$ раз.

Алгоритм наименьшего среднего квадрата ошибки с ограничениями (НСКОО). Алгоритм представляет собой простой стохастический алгоритм наискорейшего спуска и обеспечивает обнаружение известного сигнала, проходящего с определенного направления, на фоне шумов, поступающих как с того же, так и с других направлений.

В ходе процедуры адаптации алгоритм обеспечивает непрерывное изучение статистики шумов. Фильтрация шумов, проходящих с заданного направления, обеспечивается выбором необходимой частотной характеристики АР в заданном направлении или с помощью иных средств. Выделенный в результате обработки сигнал используется для решения задач обнаружения и классификации полезных сигналов.

Основным преимуществом алгоритма НСКОО является самокорректировка, что позволяет его реализовывать в течение неограниченного времени без отклонения от наложенных ограничений из-за накапливающихся ошибок вследствие округления или отбрасывания членов.

Процессор, реализующий алгоритм НСКОО, построен по схеме, аналогичной схеме для реализации остальных рассмотренных в настоящей статье алгоритмов (см. рис. 1), однако в целях математического описания алгоритма НСКОО представим его состоящим из U линий задержки, каждая из которых имеет J отводов формирования сигналов.

Математическое ожидание мощности сигнала на выходе процессора

$$E[y^2(k)] = E[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k) \cdot \mathbf{W}] = \mathbf{W}^T R_{XX} \mathbf{W}.$$

Наложённое ограничение, заключающееся в том, что сумма весовых коэффициентов на j -х отводах линий задержки должна быть равна заданному числу f_j , можно записать в виде

$$\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{W} = \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \underbrace{U \dots U}_{0 \dots 0 \dots 0 \dots 0} & \underbrace{1 \dots 1}_{j\text{-я группа из } U \text{ элементов}} & \underbrace{U \dots U}_{0 \dots 0 \dots 0 \dots 0} \end{bmatrix}^T.$$

Введем матрицу ограничений:

$$B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_j \dots \mathbf{b}_J]$$

с размерами $U \times J$, а также J -мерный вектор Φ весовых коэффициентов линии задержки с отводами (см. рис. 1), обеспечивающих настройку процессора на обнаружение сигнала, проходящего с заданного направления:

$$\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_J]^T.$$

Тогда ограничение (17) в матрично-векторной форме примет вид: $B^T \mathbf{W} = \Phi$.

На первом этапе предположим, что корреляционная матрица R_{XX} известна. При оптимизации методом наискорейшего спуска с ограничениями начальное значение весового вектора определяется как $\mathbf{W}(0) = B(B^T B)^{-1} \Phi$.

Оптимальный вектор весовых коэффициентов \mathbf{W}_{opt} находится методом неопределенных множителей Лагранжа [5]. Введем функцию $H(\mathbf{W})$, равную сумме минимизируемой функции и функции ограничений, умноженной на J -мерный вектор неопределенных множителей Лагранжа

$$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_J]:$$

$$H(\mathbf{W}) = (1/2) \mathbf{W}^T R_{XX} \mathbf{W} + \lambda^T (B^T \mathbf{W} - \Phi), \quad (18)$$

где множитель $(1/2)$ введен для упрощения вычислений. Определив градиент (18) по \mathbf{W} , получим:

$$\nabla_{\mathbf{W}} H(\mathbf{W}) = R_{XX} \mathbf{W} + B \lambda.$$

Значение шага изменения λ пропорционально модулю градиента, масштаб определяется константой μ . После k -й итерации весовой вектор определится как

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(k+1) &= \mathbf{W}(k) - \mu \nabla_{\mathbf{W}} H[\mathbf{W}(k)] = \\ &= \mathbf{W}(k) - \mu [R_{XX} \mathbf{W}(k) + B \lambda(k)]. \end{aligned}$$

Множители Лагранжа выбираются таким образом, чтобы $\mathbf{W}(k+1)$ удовлетворяло ограничению

$$B^T \mathbf{W}(k+1) = B^T \mathbf{W}(k) - \mu B^T R_{XX} \mathbf{W}(k) - \mu B^T B \lambda.$$

Решив данное уравнение относительно λ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(k+1) &= \mathbf{W}(k) - \\ &- \mu [I - B(B^T B)^{-1} B^T] R_{XX} \mathbf{W}(k) + \\ &+ B(B^T B)^{-1} [\Phi - B^T \mathbf{W}(k)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Если вектор коэффициентов на $(k+1)$ -й итерации полностью удовлетворяет ограничениям, $\Phi - B^T \mathbf{W}(k) = 0$. В общем случае этот член не равен 0. Он позволяет корректировать малые отклонения от ограничений, обусловленные ошибками вычислений, и предотвращает их возможное накопление и рост.

Введя матрицу с размерами $UJ \times UJ$

$$\Theta = I - B(B^T B)^{-1} B^T, \quad (20)$$

перепишем алгоритм (19) в форме

$$\mathbf{W}(k+1) = \Theta [\mathbf{W}(k) - \mu R_{XX} \mathbf{W}(k)] + \Phi. \quad (21)$$

Выражение (21) определяет алгоритм наискорейшего спуска с ограничениями, для применения которого нужно заранее знать корреляционную матрицу входа R_{XX} , что нельзя гарантировать для АР. Используем в качестве аппроксимации R_{XX} скалярное произведение вектора сигналов на выводах линий задержки процессора на самого себя: $\mathbf{X}(k) \cdot \mathbf{X}^T(k)$. В результате подстановки этой аппроксимации в (21) получим стохастический алгоритм НСКОО:

$$\mathbf{W}(0) = \Phi;$$

$$\mathbf{W}(k+1) = \Theta [\mathbf{W}(k) - \mu y(k) \mathbf{X}(k)] + \Phi. \quad (22)$$

Алгоритм НСКОО удовлетворяет ограничению $B^T \mathbf{W}(k+1) = \Phi$ при каждой итерации, что можно показать, умножив (22) на B^T и используя (18). При каждой итерации для применения алгоритма необходимо знать только вектор сигналов на отводах $\mathbf{X}(k)$ и выходной сигнал решетки $y(k)$. Априорного знания корреляционной матрицы входа не требуется. В (22) Φ – постоянный вектор, который можно вычислить предварительно. Наиболее сложными операциями алгоритма (22) являются умножение каждой из компонент вектора $\mathbf{X}(k)$ на скалярный множитель $\mu y(k)$ и вычисление матрицы $\Theta = I - B(B^T B)^{-1} B^T$. Поскольку матрица B имеет простой вид, умножение вектора на Θ , как того требует (22), сводится лишь к нескольким сложениям. Итерационные выражения для компонент весового вектора, записанные в виде сумм, имеют вид:

$$w_1(k+1) = w_1(k) - \mu y(k) x_1(k) - \left(\frac{1}{U}\right) \sum_{j=1}^U [w_j(k) - \mu y(k) x_j(k)] + \left(\frac{f_1}{U}\right);$$

$$\dots;$$

$$w_U(k+1) = w_U(k) - \mu y(k) x_U(k) - \left(\frac{1}{U}\right) \sum_{j=1}^U [w_j(k) - \mu y(k) x_j(k)] + \left(\frac{f_1}{U}\right);$$

$$w_{U+1}(k+1) = w_{U+1}(k) - \mu y(k) x_U(k) - \left(\frac{1}{K}\right) \sum_{u=U+1}^{2U} [w_j(k) - \mu y(k) x_j(k)] + \left(\frac{f_2}{U}\right);$$

$$\dots;$$

$$w_{2U}(k+1) = w_{2U}(k) - \mu y(k) x_{2U}(k) - \left(\frac{1}{U}\right) \sum_{j=U+1}^{2U} [w_u(k) - \mu y(k) x_u(k)] + \left(\frac{f_2}{U}\right);$$

$$\dots;$$

$$w_{UJ}(k+1) = w_{UJ}(k) - \mu y(k) x_{UJ}(k) - \left(\frac{1}{U}\right) \sum_{u=(u-1)K+1}^{UJ} [w_u(k) - \mu y(k) x_u(k)] + \left(\frac{f_J}{K}\right).$$

Исследование свойств алгоритма НСКОО.

Весовой вектор $\mathbf{W}(k)$, полученный с помощью стохастического алгоритма (22), является случайным вектором. Чтобы доказать сходимость среднего значения весового вектора к оптимальному вектору, нужно показать, что вектор разности между ними асимптотически стремится к нулю.

Доказательство сходимости среднего значения вектора существенно упрощается при допущении, что последовательные выборки вектора входа, взятые с временным интервалом Δ , статистически независимы. На практике это условие примерно выполняется за счет выборки вектора входа с интервалами, большими, чем сумма интервала корреляции входного процесса и времени распространения. Принятое допущение накладывает более жесткие ограничения, чем это нужно. Значительно более слабое ограничение асимптотической независимости векторов входа вполне достаточно для сходимости решения задачи по алгоритму НСКОО без ограничений.

Вычислив математические ожидания обеих частей (22), получим итерационное уравнение для среднего значения весового вектора НСКОО

$$E[\mathbf{W}(k+1)] = \Theta \{E[\mathbf{W}(k)] - \mu R_{XX} E[\mathbf{W}(k)]\} + \Phi. \quad (23)$$

Определим вектор

$$\mathbf{V}(k+1) = E[\mathbf{W}(k+1)] - \mathbf{W}_{\text{opt}}$$

как разность между средним значением адаптивного весового вектора после $(k+1)$ -й итерации и оптимальным вектором.

Используя (23) и соотношения

$$\Phi = (I - \Theta) \mathbf{W}_{\text{opt}}, \quad \Theta R_{XX} \mathbf{W}_{\text{opt}} = 0,$$

получим уравнение для разности:

$$\mathbf{V}(k+1) = \Theta \mathbf{V}(k) - \mu \Theta R_{XX} \mathbf{V}(k). \quad (24)$$

Так как матрица Θ обладает свойством $\Theta^2 = \Theta$, что можно показать, выполнив умножение в (20) и умножив (24) на Θ , то $\Theta \mathbf{V}(k) = I(k)$ для любых k . Следовательно, (24) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(k+1) &= [I - \mu \Theta R_{XX} \Theta] \mathbf{V}(k) = \\ &= [I - \mu \Theta R_{XX} \Theta]^{k+1} \mathbf{V}(k). \end{aligned}$$

Матрица $\Theta R_{XX} \Theta$ определяет скорость сходимости среднего значения весового вектора к оптимальному и стационарные отклонения нового вектора от оптимального. Показано [4], что $\Theta R_{XX} \Theta$ имеет точно J нулевых собственных значений, соответствующих векторам-столбцам матрицы ограничений. Это свойство является результатом того, что во время адаптации весовой вектор все время остается в $(UJ - J)$ -мерной плоскости ограничений. Также показано, что матрица $\Theta R_{XX} \Theta$ имеет $UJ - J$ ненулевых собственных значений σ_i , $i=1, \dots, (UJ - J)$, заключенных между наименьшим λ_{\min} и наибольшим λ_{\max} собственными значениями матрицы R_{XX} .

Исследование выражения $\mathbf{V}(0) = \Phi - \mathbf{W}_{\text{opt}}$ показывает, что вектор \mathbf{V} можно представить как линейную комбинацию собственных векторов матрицы $R_{XX} P$, соответствующую собственным значениям, не равным нулю.

Если $\mathbf{V}(0)$ равно собственному вектору матрицы $PR_{XX}P$ \mathbf{e}_i с собственным значением $\sigma_i \neq 0$, то

$$\mathbf{V}(k+1) = [I - \mu PR_{XX}P]^{k+1} \mathbf{e}_i = [1 - \mu \sigma_i]^{k+1} \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, сходимость среднего значения весового вектора к оптимальному вдоль собственного вектора матрицы $\Theta R_{XX} \Theta$ будет определяться соотношением $(1 - \mu \sigma_i)$. Время, за которое евклидова длина разностного вектора уменьшится в $|e|^{-1}$ раз от начального значения, определяется как

$$\tau_i = \frac{\Delta}{\ln(1 - \mu \sigma_i)} \approx \frac{\Delta}{\mu \sigma_i}, \quad (25)$$

где приближенное равенство справедливо при $\mu \sigma_i \ll 1$.

Если μ выбрано таким, что $0 < \mu < \sigma_{\max}^{-1}$, длина (норма) любого разностного вектора заключена между значениями двух убывающих геометрических прогрессий:

$$\begin{aligned} (1 - \mu \sigma_{\max})^{k+1} \|\mathbf{V}(0)\| &\leq \|\mathbf{V}(k+1)\| \leq \\ &\leq (1 - \mu \sigma_{\min})^{k+1} \|\mathbf{V}(0)\|, \end{aligned}$$

так что, если начальная разность конечна, среднее значение весового вектора сходится к оптимальному, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E[\mathbf{W}(k)] - \mathbf{W}_{\text{opt}}\| = 0$$

с постоянными времени, определяемыми формулой (25).

Применение рассмотренных алгоритмов. Количество арифметических операций и объем памяти, необходимые при реализации первого из рассмотренных алгоритмов, пропорциональны числу коэффициентов процессора. В этом заключается существенное преимущество данного алгоритма перед методами на основе прямых вычислений, для которых объем памяти и количество операций пропорциональны квадрату или кубу числа весовых коэффициентов. Упомянутое сокращение объема памяти достигается ценой компромисса между объемом памяти и временем вычислений: хотя количество вычислений, необходимых по исследованному алгоритму на каждом цикле адаптации, и пропорционально количеству весовых коэффициентов, для обеспечения сходимости требуется большое число циклов адаптации. Это значит, что исследуемый адаптивный метод является асимптотически оптимальным. В общем случае количество циклов, обеспечивающее сходимость, существенно превышает квадрат или куб числа весовых коэффициентов. Однако при обработке данных больших решеток ограничение в настоящее время связано с объемом памяти, а упомянутое увеличение времени вычислений серьезных трудностей не вносит.

Результаты тестирования рассматриваемых алгоритмов показали, что алгоритм НСКОО, начиная с некоторого значения, работает заметно быстрее первого алгоритма. Преимущество алгоритма НСКОО в скорости работы становится заметным при частоте дискретизации сигнала, поступающего на вход процессора, $f_d > 500$ Гц и количестве шагов адаптации $N_{\text{ад}} > 1000$ (рис. 2 и 3 соответственно, где маркеры указывают точки математического моделирования). Экспериментальные исследования выполнялись на персональном компьютере со следующей конфигура-

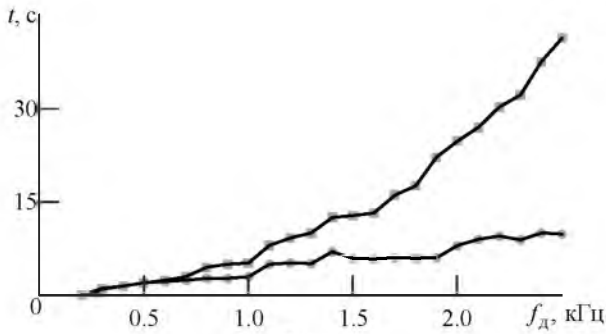


Рис. 2

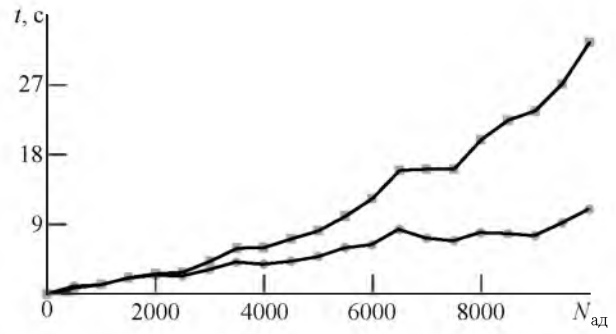


Рис. 3

Параметр	Первый алгоритм адаптации на основе итерационной процедуры	Алгоритм НСКОО
Тип вычислений	Рекуррентный	
Основная формула	$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu [\mathbf{P}_g - y(k)\mathbf{X}(k)]$	$\mathbf{W}(k+1) = \Theta [\mathbf{W}(k) - \mu R_{XX} \mathbf{W}(k)] + \Phi$
Сложность алгоритма	$O(n)$	
Ограничения	Не более нескольких тысяч чувствительных элементов решетки	Сигналы с заданного направления и шумы с других направлений некоррелированы
Основная особенность	Наличие корреляции между шумами с разных направлений и полезным сигналом	Возможность работы при изменяющихся внешних условиях
Критерий оценки качества	Средний квадрат ошибки оценивания полезного сигнала	Суммарная мощность сигнала на выходе решетки
Скорость работы	Примерно совпадает с алгоритмом НСКОО при частоте дискретизации менее 500 Гц и при количестве шагов адаптации менее 1000	Выше итерационного алгоритма при частоте более 500 Гц и при количестве шагов адаптации более 1000

ций: процессор Intel Core-i7 3-го поколения с тактовой частотой 2.4 ГГц и RAM 4 Гбайт).

По результатам анализа алгоритмов составлена сравнительная таблица, описывающая их основные характеристики и возможности.

Рассмотренные и исследованные алгоритмы адаптации эффективны при обработке гидроакустических сигналов с использованием АР.

Выбор конкретного алгоритма определяется требованиями, предъявляемыми к количеству элементов АР, скорости работы при обработке сигнальных выборок большого объема, возможности работы в условиях внешних помех и сложности проводимых вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышкин Г. С. Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов / АО «Концерн "ЦНИИ "Электроприбор"». СПб., 2011. 374 с.
2. Griffiths L. J. A Simple Adaptive Algorithm for Real-Time Processing in Antenna Arrays // Proc. of the IEEE. 1969. Vol. 57, iss. 10. P. 1696–1704.
3. Адаптивные антенные системы / Б. Уидроу, П. Е. Мантей, Л. Дж. Гриффитс, Б. Б. Гуд // ТИИЭР. 1976. Т. 55, № 12. С. 78–95.

4. Daniell T. P. Adaptive estimation with manually correlated tracing samples / Stanford Electron. Labs., Stanford, Calif., Doc. SEL-68-083, Tech. Rep. TR 6778-4, 1968. 14 p.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ: в 2 т. Т. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 662 с.

D. M. Klionskiy, A. M. Golubkov, D. I. Kaplun, M. C. Kupriyanov
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

Study of adaptation algorithms for processing hydro acoustic signals

Adaptive algorithms for processing signals of antenna arrays in real-time with linear constraints are considered for hydroacoustic tasks. The analysis results of these algorithms are provided and their characteristics are given. Recommendations for using the algorithms in various conditions are given.

Adaptation algorithm, hydro acoustic signal, antenna array, processor

Статья поступила в редакцию 28 января 2016 г.