

Взаимная синхронизация антиферромагнитных спинтронных осцилляторов

А. Ю. Митрофанова^{1,2}, А. Р. Сафин^{1,3✉}, О. В. Кравченко^{1,4}, С. А. Никитов^{1,2}

¹Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

³Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия

⁴Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия

✉arsafin@gmail.com

Аннотация

Введение. Исследования последних лет привели к обнаружению качеств спинтронных осцилляторов, обеспечивающих их широкое применение на практике как устройств, обрабатывающих и генерирующих сигналы. Существенным ограничением практической реализации спинтронных осцилляторов является их малая мощность, из-за чего появляется необходимость их синхронизации.

Цель работы. Определение условий реализации синхронного режима двух связанных посредством общего тока антиферромагнитных спинтронных осцилляторов.

Материалы и методы. Для упрощения численного моделирования системы связанных резистивно антиферромагнитных осцилляторов был использован метод многих масштабов, позволивший рассматривать систему уравнений Курамото вместо исходной. Для определения полосы захвата модели Курамото был применен метод аппроксимации гомоклинической траектории.

Результаты. Получено уравнение Курамото для фаз парциальных осцилляторов, учитывающее влияние инерционного слагаемого и фазового сдвига между ними. Получены выражения для полосы захвата и синхронизации как функции параметров системы (токов подкачки, размеров) и проведено численное моделирование, позволяющее количественно определить границы существования двух режимов: синхронного и асинхронного.

Заключение. Результаты численного моделирования системы уравнений Курамото и уравнения Адлера для двух связанных спинтронных осцилляторов соответствуют найденным теоретически значениям полос захвата и синхронизации. Схему приведения модели антиферромагнитных осцилляторов к модели Курамото в дальнейшем можно распространить и на случай большего количества связанных осцилляторов, что позволит упростить вычислительный эксперимент и существенно сократить время численного моделирования.

Ключевые слова: синхронизация, полоса захвата, модель Курамото, уравнение Адлера, АФМ-осциллятор

Для цитирования: Взаимная синхронизация антиферромагнитных спинтронных осцилляторов / А. Ю. Митрофанова, А. Р. Сафин, О. В. Кравченко, С. А. Никитов // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2022. Т. 25, № 5. С. 80–90. doi: 10.32603/1993-8985-2021-25-5-80-90

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FFWZ-2022-0015).

Статья поступила в редакцию 26.07.2022; принята к публикации после рецензирования 19.09.2022; опубликована онлайн 29.11.2022

Mutual Synchronization of Antiferromagnetic Spintronic Oscillators

Anastasia Yu. Mitrofanova^{1,2}, Ansar R. Safin^{1,3✉}, Oleg V. Kravchenko^{1,4}, Sergey A. Nikitov^{1,2}

¹Kotel'nikov Institute of Radioengineering and Electronics, RAS, Moscow, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Russia

³National Research University "MPEI", Moscow, Russia

⁴Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia

✉arsafin@gmail.com

Abstract

Introduction. Recent studies into the properties of spintronic oscillators have led to broadening their scope of practical application as devices for generating and processing signals. The practical implementation of spintronic oscillators is, however, significantly limited by their low power capacity, thus requiring synchronization between devices.

Aim. Determination of conditions for the implementation of the synchronous regime of two antiferromagnetic spintronic oscillators coupled by a common current.

Materials and methods. To simplify the numerical simulation of a system of coupled resistively antiferromagnetic oscillators, the method of multiple-time-scale analysis was used. This allowed a system of Kuramoto equations to be considered instead of the original system. To determine the locking band of the Kuramoto model, the homoclinic trajectory approximation method was applied.

Results. A system of Kuramoto equation for the phases of partial oscillators under the influence of the inertial term and phase shift was obtained. Expressions describing the locking and synchronization band as functions of the system parameters (bias currents and sizes) were derived. The numerically simulated Kuramoto model was used to determine the bands of the synchronous and asynchronous regimes.

Conclusion. The results of numerical simulations of the system of Kuramoto equations and the Adler equation for two coupled spintronic oscillators agree well with the theoretically calculated values of locking and synchronization ranges. The scheme for reducing the model of antiferromagnetic oscillators to a Kuramoto model can be further extended to the case of a larger number of coupled oscillators, which will simplify computational experiments and significantly reduce the time required for numerical simulations.

Keywords: synchronization, locking band, Kuramoto model, Adler equation, AFM oscillator

For citation: Mitrofanova A. Yu., Safin A. R., Kravchenko O. V., Nikitov S. A. Mutual Synchronization of Antiferromagnetic Spintronic Oscillators. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2022, vol. 25, no. 5, pp. 80–90. doi: 10.32603/1993-8985-2021-25-5-80-90

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Source of financing. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FFWZ-2022-0015).

Submitted 26.07.2022; accepted 19.09.2022; published online 29.11.2022

Введение. Синхронизация автоколебательных систем является фундаментальной проблемой теории нелинейных колебаний и волн [1–6]. Современные методы нанотехнологии позволяют реализовать большие массивы взаимосвязанных осцилляторов, решающих задачи сложения мощностей, многомодовой генерации, нейроморфных вычислений и т. д. Примером наиболее перспективных являются спинтронные структуры, выполненные на основе магнитных тонких пленок в едином технологическом цикле и с практически

идентичными параметрами [7, 8]. Осцилляторы, выполненные на основе спинтроники, обладают рядом положительных качеств: возможностью перестройки резонансной частоты током и магнитным полем; совместимостью с технологией производства КМОП СБИС; интегрированностью в едином наноразмерном блоке резонансной системы, управителя частоты и активного элемента; возможностью реализации различных механизмов связи (консервативных и диссипативных). Соответствующие осцилляторы получили

Взаимная синхронизация антиферромагнитных спинтронных осцилляторов

Mutual Synchronization of Antiferromagnetic Spintronic Oscillators

название "спинтронные осцилляторы" (СО). Существенным недостатком, ограничивающим практическое применение СО, является низкая мощность выходных колебаний (порядка единиц нановатт). Решение данного вопроса может быть достигнуто с помощью соединения нескольких маломощных СО и их последующей синхронизации для сложения мощностей [9, 10]. Также явление синхронизации играет важную роль в нейроморфных вычислениях [11, 12], где решение когнитивной задачи предоставляется системе связанных осцилляторов [13, 14].

Спинтронные осцилляторы могут быть выполнены на основе ферромагнитных и антиферромагнитных магнитных пленок. Резонансные частоты ферромагнитных СО ограничены несколькими десятками гигагерц, а для возбуждения колебаний намагниченности на частотах в сотни и тысячи гигагерц требуются высокие плотности тока и величины поля подмагничивания, что существенно усложняет конструкцию осцилляторной системы. Резонансные частоты антиферромагнетиков находятся в широком частотном диапазоне – от единиц гигагерц до десятков терагерц, что связано с явлением обменного усиления [15] параметров материала (резонансных частот, скорости спиновых волн и т. д.). Широко исследуются физические и математические модели связанных резистивно, посредством общего тока, антиферромагнитных (АФМ) осцилляторов. АФМ-осцилляторы предлагают применять в качестве детекторов и генераторов терагерцевых сигналов [16, 17], а также в качестве логических элементов [18], которые можно использовать для нейропроцессоров.

Удобной моделью фазовых осцилляторов, описывающей явление синхронизации, является модель Курамото [19]. Она применима для описания процессов, в которых амплитуды осцилляторов достигли стационарного режима, а скорость изменения фаз заметно ниже. В некоторых работах сведение моделей ферромагнитных СО к модели Курамото служило средством определения границ области синхронного режима [20, 21]. Исследовались также модели ансамблей связанных осцилляторов Курамото с различной топологией объединения [22–24].

В данной статье исследуется модель Курамото фазовых антиферромагнитных спинтрон-

ных осцилляторов с учетом инерционного сглаженного и наличия фазового сдвига между осцилляторами. Структура работы следующая. Описывается физическая структура рассматриваемой модели двух связанных антиферромагнитных СО и принцип работы парциального осциллятора, построена его регулировочная характеристика (зависимость частоты колебаний от силы тока). Затем представленная модель связанных АФМ-осцилляторов с помощью метода многих масштабов сводится к модели Курамото и уравнению для разности фаз (уравнение Адлера), которое исследуется методом фазовой плоскости. Далее представлены результаты численного моделирования, демонстрирующие границы областей синхронизации и асинхронного режима. Далее обсуждаются полученные результаты.

Физическая структура. Рассмотрим гетероструктуру из двух связанных общим слоем нормального металла (НМ) АФМ-осцилляторов, каждый из которых еще расположен на отдельном слое НМ (рис. 1). По двум отдельным слоям НМ протекают постоянные токи $j_{DCj}, j=1,2$. Заметим, что для изучения синхронизации двух АФМ-осцилляторов подбираются такие значения токов j_{DCj} , что в антиферромагнетике они вызывают ротационное движение вектора Нееля в легкой плоскости (ЛП), которое приводит к возникновению спинового тока $j_{Sj}, j=1,2$ из АФМ-осциллятора в общий слой НМ, связывающий два осциллятора друг с другом. На рис. 1 представлена структура, где $\varphi_j, j=1,2$ – угол поворота вектора Нееля в ЛП. Под синхронизацией здесь понимается совпадение частот $d\varphi_j/dt$ осцил-

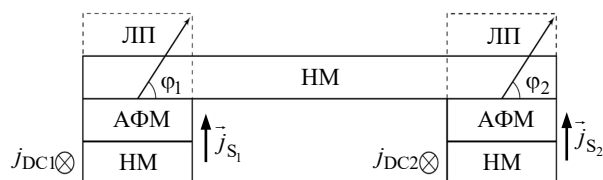


Рис. 1. Физическая структура двух связанных через общий слой тяжелого металла АФМ-осцилляторов

Fig. 1. Physical structure of two AFM-oscillators mutually coupled through a common heavy metal layer

ляции вектора Нееля в двух связанных антиферромагнетиках.

Динамика единичного АФМ-осциллятора описывается маятниковым уравнением вида

$$\frac{1}{\omega_{\text{ex}}} \ddot{\phi}_j + \alpha \dot{\phi}_j + \frac{\omega_e}{2} \sin 2\phi_j = \sigma j_{\text{DC}j}, \quad j=1,2. \quad (1)$$

Здесь $\omega_{\text{ex}} = \gamma H_{\text{ex}}$; $\omega_e = \gamma H_e$ являются частотами полей обмена H_{ex} и анизотропии (ЛП) H_e (γ – гирромагнитное отношение); α – коэффициент затухания Гилберта; $\sigma j_{\text{DC}j}$ – спиновый момент, где $\sigma = (2\pi)4.32$ Гц · см²/А – коэффициент спинного переноса; $j_{\text{DC}j}$ – плотность постоянного тока, протекающего по шине, на которой расположен j -й АФМ-осциллятор. Динамика единичного маятникового осциллятора хорошо известна и подробно изучалась в [25, 26]. Отметим, что в парциальном случае возможны 3 режима АФМ-осциллятора: докритический, характеризующийся устойчивым затухающим движением вектора Нееля в АФМ; послекритический, для которого характерно автоколебательное ротационное движение в ЛП; промежуточный, устойчивость которого зависит от начальных условий.

С помощью численного моделирования системы (1) для двух единичных АФМ-осцилляторов на рис. 2 показана, во-первых, зависимость частоты осциллятора АФМ2 от плотно-

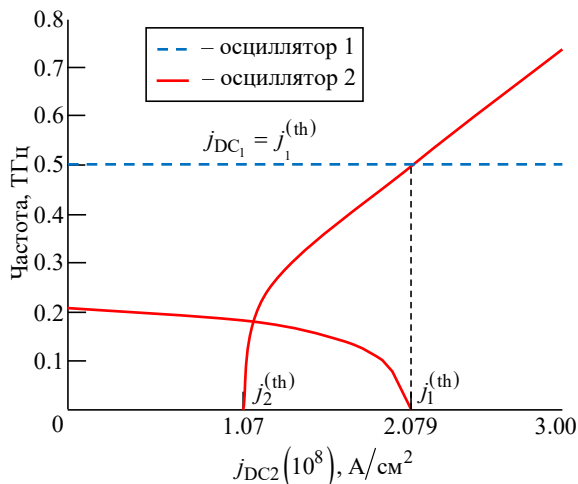


Рис. 2. Зависимость частот несвязанных антиферромагнитных спинтронных осцилляторов при фиксированном токе через первый осциллятор и варьировании тока через второй

Fig. 2. Frequency dependence of uncoupled antiferromagnetic spintronic oscillators at a fixed current through the first oscillator and varying the current through the second oscillator

сти постоянного тока $j_{\text{DC}2} \in [0.5 \cdot 10^8]$ А/см².

Два критических тока $j_2^{(\text{th})} = 1.07 \cdot 10^8$ А/см² и $j_1^{(\text{th})} = 2.079 \cdot 10^8$ А/см² [27] делят рабочую область на 3 подобласти: колебательную, ротационную и гистерезисную. Ток для осциллятора АФМ1 фиксирован, в частности для случая, показанного на рис. 2, $j_{\text{DC}1} = j_1^{(\text{th})} = \omega_e / (2\sigma)$. Другие физические параметры для СО совпадают: $\omega_{\text{ex}} = 2\pi \cdot 27.5$ ТГц; $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$; $\omega_e = 2\pi \cdot 1.75$ ГГц. Для парциального случая на рис. 2 можно наблюдать точку пересечения графиков собственных частот осцилляторов АФМ1 и АФМ2. Чтобы избежать зависимости режима АФМ от начальных условий для исследования связанных осцилляторов, будем варьировать постоянный ток таким образом, что $j_{\text{DC}j} > j_1^{(\text{th})}$.

Для исследования взаимодействия двух АФМ-осцилляторов свяжем их резистивно через общий слой НМ, что отразится на связи через производную в математической модели [18]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{\text{ex}}} \ddot{\phi}_j + \alpha \dot{\phi}_j + \frac{\omega_e}{2} \sin 2\phi_j = \\ = \sigma j_{\text{DC}j} + \sum_{i=1}^N k_{ji} \dot{\phi}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k_{ji} \sim 10^{-3}$ – коэффициенты связи, по порядку величин соответствующие коэффициенту затухания. Обратим внимание, что проведение вычислительного эксперимента с моделью (1) уже сопряжено со значительными затратами времени и вычислительными сложностями. Чтобы упростить вычисления для численного моделирования, сведем (2) к модели Курамото с помощью метода многих масштабов. Ранее метод многих масштабов применялся для маятниковых уравнений с консервативной связью для осцилляторов Джозефсона [20, 26].

Переход к модели Курамото методом многих масштабов. Исследуем систему дифференциальных уравнений (2) методом многих масштабов, аналогично модели для осцилляторов Джозефсона в [20]. Предварительно приве-

дем систему (2) к безразмерному виду, домножив ее на 2 и обозначив $\Phi = 2\varphi$, и перейдем к безразмерному времени $\omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{\omega_e \omega_{ex}}$. Запишем получившееся уравнение:

$$\frac{d^2 \Phi_j}{d(\omega_0 t)^2} + \alpha \frac{\omega_{ex}}{\omega_0} \frac{d\Phi_j}{d(\omega_0 t)} + \sin \Phi_j = \frac{2\sigma_{DCj} \omega_{ex}}{\omega_0^2} + \frac{\omega_{ex}}{\omega_0} \sum_{i=1}^N k_{ji} \frac{\Phi_i}{d(\omega_0 t)}. \quad (3)$$

Далее внесем коэффициент $\gamma = \alpha \omega_{ex} / \omega_0$ в переменную времени $\tilde{\tau} = \omega_0 t / \gamma$ и поделим (3) на $\zeta_{DC} = 2\sigma_{DCfix} \omega_{ex} / \omega_0^2$, введя малый безразмерный параметр $\varepsilon = 1 / \zeta_{DC}$ при синусе, причем $j_{DCfix} = j_{DC1}$ – это постоянный ток, отвечающий за фиксированную частоту одного из связанных осцилляторов. Для безразмерных переменных $\tau = \zeta_{DC} \omega_0 t / \gamma$; $m = \zeta_{DC} / \gamma^2$; $l_j = j_{DCj} / j_{DCfix}$ и $\kappa_{ji} = k_{ji} \omega_{ex} / (\gamma \omega_0)$ получим

$$m \frac{d^2 \Phi_j}{d\tau^2} + \frac{d\Phi_j}{d\tau} + \varepsilon \sin \Phi_j = l_j + \sum_{i=1}^N \kappa_{ji} \frac{d\Phi_i}{d\tau}. \quad (4)$$

Введем независимые временные переменные масштабов $T_n = \varepsilon^n \tau$, а искомые функции Φ_j запишем в виде $\Phi_j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_{nj}(T_0, T_1, T_2, \dots)$. Принимая $\partial_n = \partial / \partial T_n$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \partial_0 + \varepsilon \partial_1 + \varepsilon^2 \partial_2 + \varepsilon^3 \partial_3; \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \partial_0^2 + 2\varepsilon \partial_0 \partial_1 + \varepsilon^2 (2\partial_0 \partial_2 + \partial_1^2) + \\ &\quad + 2\varepsilon^3 (\partial_0 \partial_3 + \partial_1 \partial_2); \\ \sin \Phi_j &= \sin(\Phi_{0j} + \varepsilon \Phi_{1j} + \varepsilon^2 \Phi_{2j} + \varepsilon^3 \Phi_{3j} + \dots) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_{nj}, \end{aligned}$$

где $S_{0j} = \sin \Phi_{0j}$; $S_{1j} = \varepsilon \Phi_{1j} \cos \Phi_{0j}$; $S_{2j} = \varepsilon^2 \times (\Phi_{2j} \cos \Phi_{0j} - 0.5 \Phi_{1j}^2 \sin \Phi_{0j})$ и т. д., представим (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left[\partial_0^2 + 2\varepsilon \partial_0 \partial_1 + \varepsilon^2 (2\partial_0 \partial_2 + \partial_1^2) + \right. \\ \left. + 2\varepsilon^3 (\partial_0 \partial_3 + \partial_1 \partial_2) \right] \Phi_{nj} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left[\partial_0 + \varepsilon \partial_1 + \varepsilon^2 \partial_2 + \varepsilon^3 \partial_3 \right] \Phi_{nj} + \\ + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_{nj} = \\ = l_j + \sum_i \kappa_{ji} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left[\partial_0 + \varepsilon \partial_1 + \varepsilon^2 \partial_2 + \varepsilon^3 \partial_3 \right] \Phi_{ni}. \quad (5) \end{aligned}$$

В нулевом приближении оставим в (5) члены нулевого порядка малости и получим уравнение

$$m \partial_0^2 \Phi_{0j} + \partial_0 \Phi_{0j} = l_j + \kappa_{ji} \partial_0 \Phi_{0j},$$

решая которое, отбросим быстро затухающие слагаемые (аналогично с тем, как это было сделано в [20]). Тогда в качестве решения (5) получим

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \frac{l_1 + l_2 \kappa_{12}}{1 - \kappa_{12} \kappa_{21}} T_0 + C_1^{(0)}, \\ \Phi_{02} &= \frac{l_2 + l_1 \kappa_{21}}{1 - \kappa_{12} \kappa_{21}} T_0 + C_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Здесь константы $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ являются постоянными по отношению к T_0 , поэтому на их месте можно записать функцию от T_1, T_2, T_3, \dots . Коэффициенты при T_0 обозначим, соответственно, ω_1, ω_2 . Тогда решение нулевого приближения будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \omega_1 T_0 + \psi_1(T_1, T_2, T_3); \\ \Phi_{02} &= \omega_2 T_0 + \psi_2(T_1, T_2, T_3). \end{aligned} \quad (6)$$

В первом приближении решение следующего уравнения

$$\begin{aligned} 2m \partial_0 \partial_1 \Phi_{0j} + m \partial_0^2 \Phi_{0j} + \partial_1 \Phi_{0j} + \\ + \partial_0 \Phi_{1j} + S_{0j} = \kappa_{ji} \partial_1 \Phi_{0i} + \Phi_{1i} \end{aligned} \quad (7)$$

будем искать в форме

$$\Phi_{1j} = A_j^{(1)} T_0 + B_j^{(1)} \sin \Phi_{0j} + C_j^{(1)} \cos \Phi_{0j}, \quad (8)$$

где $A_j^{(n)}, B_j^{(n)}, C_j^{(n)}$ – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить, используя найденные на предыдущем этапе Φ_{01}, Φ_{02} (6).

Номер n совпадает с текущим приближением. Для синуса и косинуса аргумента Φ_{02} запишем

$$\begin{aligned}\sin \Phi_{02} &= \sin(\Phi_{01} + [\Phi_{02} - \Phi_{01}]) = \\ &= \sin \Phi_{01} \cos \Delta + \cos \Phi_{01} \sin \Delta; \\ \cos \Phi_{02} &= \cos(\Phi_{01} + [\Phi_{02} - \Phi_{01}]) = \\ &= \cos \Phi_{01} \cos \Delta - \sin \Phi_{01} \sin \Delta,\end{aligned}$$

где $\Delta = \Phi_{02} - \Phi_{01}$. При этом $\sin \Phi_{01}$ и $\cos \Phi_{01}$ оставим без изменений. Подставив в (8) производные известных Φ_{01}, Φ_{02} и тригонометрические функции, а также приравняв друг к другу слагаемые при единице, из (7) получим систему

$$\begin{aligned}A_1^{(1)} - \kappa_{12}A_2^{(1)} - \kappa_{12}\partial_1\psi_2 + \partial_1\psi_1 &= 0; \\ A_2^{(1)} - \kappa_{21}A_1^{(1)} - \kappa_{21}\partial_1\psi_1 + \partial_1\psi_2 &= 0,\end{aligned}$$

решением которой будет $A_j^{(1)} = \partial_1\psi_j$. Из равенства нулю секулярного члена в (8) найдем производные $\partial_1\psi_j = 0$.

Во втором приближении решения уравнения

$$\begin{aligned}m(2\partial_0\partial_2 + \partial_1^2)\Phi_{0j} + 2m\partial_0\partial_1\Phi_{1j} + \\ + m\partial_0^2\Phi_{2j} + \partial_2\Phi_{0j} + \partial_1\Phi_{1j} + \partial_0\Phi_{2j} + S_{1j} = \\ = \kappa_{ji}\partial_2\Phi_{0i} + \kappa_{ji}\partial_1\Phi_{1i} + \kappa_{ji}\partial_0\Phi_{2i}\end{aligned}\quad (9)$$

аналогично с первым приближением принимают вид

$$\begin{aligned}\Phi_{2j} &= A_j^{(2)}T_0 + B_j^{(2)}\sin \Phi_{0j} + C_j^{(2)}\cos \Phi_{0j} + \\ &+ D_j^{(2)}\sin 2\Phi_{0j} + E_1^{(2)}\cos 2\Phi_{0j}.\end{aligned}$$

В запись решений добавлены неизвестные коэффициенты $D_j^{(n)}$ и $E_j^{(n)}$.

Найдя необходимые производные и подставив их в (9), при необходимости можно записать систему из десяти уравнений, переходя от $\sin \Phi_{02}$ и $\cos \Phi_{02}$ к $\sin \Phi_{01}$ и $\cos \Phi_{01}$ для первого уравнения системы относительно Φ_{21} , и наоборот, от $\sin \Phi_{01}$ и $\cos \Phi_{01}$ к $\sin \Phi_{02}$ и $\cos \Phi_{02}$ для второго уравнения системы относительно Φ_{22} . Здесь понадобится только пара уравнений с членами при константе

$$\begin{aligned}A_1^{(2)} - \kappa_{12}A_2^{(2)} &= \kappa_{12}\partial_2\psi_2 - m\partial_1^2\psi_1 - \\ &- \partial_2\psi_1 - 0.5C_1^{(1)}; \\ A_2^{(2)} - \kappa_{21}A_1^{(2)} &= \kappa_{21}\partial_2\psi_1 - m\partial_1^2\psi_2 - \\ &- \partial_2\psi_2 - 0.5C_2^{(1)},\end{aligned}$$

где коэффициенты $C_j^{(1)}$ можно найти из (8), приравняв друг к другу по отдельности члены при синусе и косинусе. Получив решения $A_j^{(2)}$ и приравняв эти коэффициенты к нулю по тем же соображениям, что имели место в первом приближении, а также учитывая, что $\partial_1\psi_1 = 0$, найдем

$$\begin{aligned}\partial_2\psi_1 &= \frac{-C_1^{(1)} + \kappa_{12}C_2^{(1)}}{2(1 - \kappa_{12}\kappa_{21})}; \\ \partial_2\psi_2 &= \frac{-C_2^{(1)} + \kappa_{21}C_1^{(1)}}{2(1 - \kappa_{12}\kappa_{21})}.\end{aligned}$$

Вернемся к исходной безразмерной переменной $\tilde{\tau} = \frac{\omega_0 t}{\gamma} = \frac{\tau}{\zeta_{DC}} = \varepsilon\tau$ и найдем выражения для производных

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_{0j}}{d\tilde{\tau}} &= \zeta_{DC} \frac{d\Phi_{0j}}{d\tau} = \\ &= \zeta_{DC} [\partial_0 + \varepsilon\partial_1 + \varepsilon^2\partial_2] [\omega_j T_0 + \psi_j] = \\ &= \zeta_{DC} \omega_j + \partial_1\psi_j + \frac{1}{\zeta_{DC}} \partial_2\psi_j; \\ \frac{d^2\Phi_{0j}}{d(\tilde{\tau})^2} &= \zeta_{DC}^2 \frac{d^2\Phi_{0j}}{d\tau^2} = \\ &= \zeta_{DC}^2 [\partial_0^2 + 2\varepsilon\partial_0\partial_1 + \varepsilon^2(2\partial_0\partial_1 + \partial_1^2)] \times \\ &\times [\omega_j T_0 + \psi_j] = \partial_1^2\psi_j.\end{aligned}$$

Учитывая найденные производные по ψ_j , получим

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_{0j}}{d\tau} &= \tilde{\omega}_j + \frac{C_1^{(1)} + \kappa_{12}C_2^{(1)}}{2\zeta_{DC}(1 - \kappa_{12}\kappa_{21})}; \\ \frac{d^2\Phi_{0j}}{d(\tau)^2} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь и далее заменим символ Φ_{0j} на ψ_j . Руководствуясь видом левой части (4) и учитывая $\tilde{m} = 1/\gamma^2$, запишем

$$\tilde{m} \frac{d^2 \psi_1}{d(\tau)^2} + \frac{d\psi_1}{d\tau} = \tilde{\omega}_1 - \frac{C_1^{(1)} - \kappa_{12} C_2^{(1)}}{2\zeta_{DC}(1 - \kappa_{12}\kappa_{21})};$$

$$\tilde{m} \frac{d^2 \psi_2}{d(\tau)^2} + \frac{d\psi_2}{d\tau} = \tilde{\omega}_2 - \frac{C_2^{(1)} - \kappa_{21} C_1^{(1)}}{2\zeta_{DC}(1 - \kappa_{12}\kappa_{21})},$$

что можно переписать в виде

$$\tilde{m} \frac{d^2 \psi_j}{d(\tau)^2} + \frac{d\psi_j}{d\tau} = \tilde{\omega}_j + C_j - \alpha_j \sin \Delta_\psi - \beta_j \cos \Delta_\psi, \quad (10)$$

где $\Delta_\psi = \psi_1 - \psi_2$, или при условии $\alpha_j, \beta_j > 0$, если пренебречь сдвигом разности фаз,

$$\tilde{m} \frac{d^2 \psi_j}{d(\tau)^2} + \frac{d\psi_j}{d\tau} = \Omega_j - A_j \sin(\Delta_\psi), \quad (11)$$

где $A_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, а само уравнение (11) представляет собой уравнение Курамото с инерцией. Здесь выражения параметров в (10) имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{-\kappa_{12} m \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)};$$

$$\beta_1 = \frac{\kappa_{12} \omega_2 (m^2 \omega_1 \omega_2 - 1)}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)};$$

$$\alpha_2 = \frac{\kappa_{21} m \omega_1 (\omega_1 + \omega_2)}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)};$$

$$\beta_2 = \frac{\kappa_{21} \omega_1 (m^2 \omega_1 \omega_2 - 1)}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)},$$

а добавки к частоте, соответственно:

$$C_1 = \frac{\kappa_{12} (\omega_1 + m^2 \omega_1^3) + m^2 \omega_2^3 + \omega_2}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)};$$

$$C_2 = \frac{\kappa_{21} (\omega_2 + m^2 \omega_2^3) + m^2 \omega_1^3 + \omega_1}{-2\zeta_{DC} \omega_1 \omega_2 (m^2 \omega_1^2 + 1)(m^2 \omega_2^2 + 1)}.$$

Результаты. Полученная модель Курамото (11) состоит из двух дифференциальных уравнений второго порядка, что приводит к четырехмерной задаче Коши. Для уменьшения размерности перейдем от модели Курамото к уравнению Адлера путем вычитания уравнений, входящих в (11), друг из друга. Таким образом, перейдем к обобщенному уравнению Адлера вида

$$\tilde{m} \ddot{\Delta}_\psi + \dot{\Delta}_\psi = \Delta\Omega - \tilde{A} \sin(\Delta_\psi + \eta), \quad (12)$$

где $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$; $\tilde{A} = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$;

$$\eta = \arcsin \frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}}.$$

Обобщенное уравнение Адлера (12) записано для разности фаз первого ψ_1 и второго осцилляторов ψ_2 , участвующих по отдельности в двух уравнениях модели Курамото (11). Здесь $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$, $\tilde{A} = A_1 - A_2$. Форма Коши для уравнения Адлера будет системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка, для которой исследуем динамику на фазовой плоскости.

Для уравнений, подобных полученному уравнению Адлера, ранее уже находились выражения для полосы захвата и полосы синхронизма [28]. В данном случае в безразмерном виде разность частот для полосы захвата Δ_3 и полосы синхронизма Δ_c , соответственно, равны

$$\Delta_3 = \frac{45\pi}{4} \frac{\sqrt{\tilde{A}m}}{25m + 3\tilde{A}};$$

$$\Delta_c = \tilde{A}.$$

Подставив оставшиеся прежними параметры $\omega_{ex}, \omega_e, \alpha, \sigma, j_{DCj}$ и $k_{12} = k_{21} = 3.5 \cdot 10^{-3}$, можно получить токи, соответствующие полосам захвата и синхронизма. В дальнейшем их можно использовать для настройки параметров в системах АФМ-осцилляторов в задачах нейроморфных вычислений.

Вычислительный эксперимент над моделью Курамото (10) и уравнением Адлера (12) показал существование двух режимов взаимодействия двух связанных осцилляторов: асинхронного, когда j_{DC2} далеко от j_{DC1} и синхронизации не наступает; синхронного, для которого

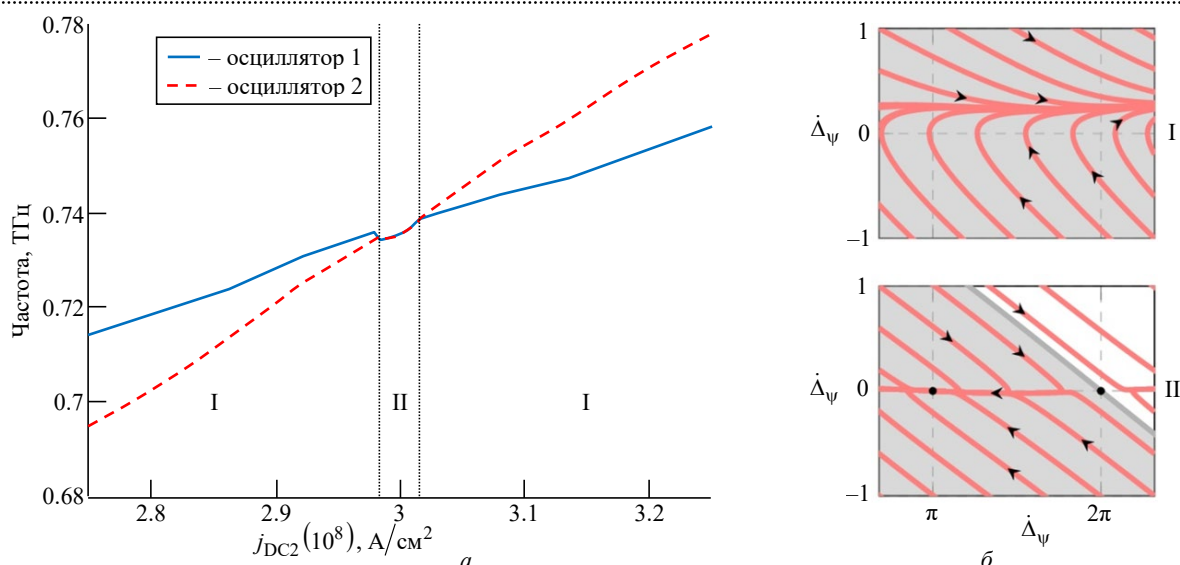


Рис. 3. Зависимость частоты автоколебаний двух связанных АФМ-осцилляторов, демонстрирующих синхронизацию (а) и фазовые портреты, полученные в результате анализа обобщенного уравнения Адлера, двух возможных режимов рассматриваемой системы (б): I – асинхронный режим, представленный на фазовой плоскости предельным циклом второго рода; II – устойчивый синхронный режим, представленный узлом

Fig. 3. Dependence of the frequency of self-oscillations of two coupled antiferromagnetic oscillators demonstrating synchronization (a) and phase portraits obtained from the analysis of the generalized Adler equation for two possible regimes of the system under consideration (b): I – asynchronous mode represented on the phase plane by a limit cycle of the second kind; II – stable synchronous mode represented by a node

$|j_{DC1} - j_{DC2}|$ мало и наблюдается синхронизация. Названные режимы проиллюстрированы на рис. 3. На фазовой плоскости асинхронный режим приобретает вид предельного цикла второго рода, а синхронному режиму соответствуют 2 точки покоя: устойчивый узел и седло.

Заключение. В настоящей статье исследовалась взаимная синхронизация двух связанных АФМ-осцилляторов. Предварительное численное моделирование единичного осциллятора позволило, во-первых, получить 3 режима работы такого осциллятора, определяющихся критическими токами и различающихся движением вектора Нееля в антиферромагнетике: колебательным, ротационным и гистерезисным. Для определения

границы области синхронного режима модель двух связанных резистивной связью АФМ-осцилляторов была приведена к более простым для проведения вычислительного эксперимента модели Курамото и обобщенному уравнению Адлера. Результат численного моделирования полученных упрощенных уравнений для двух связанных СО позволил количественно определить границы областей захвата и синхронизма. Схему приведения модели АФМ-осцилляторов к модели Курамото в дальнейшем можно распространить и на случай большего количества связанных осцилляторов, что позволит упростить вычислительный эксперимент и существенно сократить время численного моделирования.

Авторский вклад

Митрофанова Анастасия Юрьевна – переход от модели резистивно связанных АФМ-осцилляторов к модели Курамото и реализация вычислительного эксперимента. Подготовка текста статьи.

Сафин Ансар Ризаевич – руководство работой. Подготовка текста статьи.

Кравченко Олег Викторович – реализация вычислительного эксперимента. Подготовка текста статьи.

Никитов Сергей Аполлонович – руководство работой. Подготовка текста статьи.

Author's contribution

Anastasia Yu. Mitrofanova – obtaining a Kuramoto model from resistively coupled AFM oscillators with multiple-time scale and the numerical simulation. Preparation of the text for the study.

Ansar R. Safin – supervision of the study. Preparation of the text for the study.

Oleg V. Kravchenko – numerical simulation. Preparation of the text for the study.

Sergey A. Nikitov – supervision of the study. Preparation of the text for the study.

Список литературы

1. Oliveira H. M., Melo L. V. Huygens synchronization of two clocks // *Sci. Rep.* 2015. Vol. 5, iss. 1. P. 1–12. doi: 10.1038/srep11548
2. The sympathy of two pendulum clocks: beyond Huygens' observations / J. P. Ramirez, L. A. Olvera, H. Nijmeijer, J. Alvarez // *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6, iss. 1. P. 1–16. doi: 10.1038/srep23580
3. Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature.* 2001. Vol. 410, iss. 6825. P. 277–284. doi: 10.1038/35065745
4. Cellular construction of a circadian clock: period determination in the suprachiasmatic nuclei / C. Liu, D. R. Weaver, S. H. Strogatz, S. M. Reppert // *Cell.* 1997. Vol. 91, iss. 6. P. 855–860. doi: 10.1016/S0092-8674(00)80473-0
5. Buck J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II // *The Quarterly review of biology.* 1988. Vol. 63, iss. 3. P. 265–289. doi: 10.1086/415929
6. Changchao L., Zhongjian K. Research on the frequency synchronization control strategy for power system // *Intern. J. of Electrical Power & Energy Systems.* 2022. Vol. 134. P. 107407. doi: 10.1016/j.jepes.2021.107407
7. Kurenkov A., Fukami S., Ohno H. Neuromorphic computing with antiferromagnetic spintronics // *J. Appl. Phys.* 2020. Vol. 128, iss. 1. P. 010902. doi: 10.1063/5.0009482
8. Two-dimensional mutually synchronized spin Hall nano-oscillator arrays for neuromorphic computing / J. Grollier, D. Querlioz, K. Y. Camsari, K. Everschor-Sitte, S. Fukami, M. D. Stiles // *Nat. electronics.* 2020. Vol. 3, iss. 7. P. 360–370. doi: 10.1038/s41928-019-0360-9
9. Scaling up electrically synchronized spin torque oscillator networks / S. Tsunegi, T. Taniguchi, R. Lebrun, K. Yakushiji, V. Cros, J. Grollier, A. Fukushima, S. Yuasa, H. Kubota // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, iss. 1. P. 1–7. doi: 10.1038/s41598-018-31769-9
10. Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry / B. Dieny, I. L. Prejbeanu, K. Garello et al. // *Nat. Electronics.* 2020. Vol. 3, iss. 8. P. 446–459. doi: 10.1038/s41928-020-0461-5
11. Hoppensteadt F. C., Izhikevich E. M. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks // *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2000. Vol. 11, iss. 3. P. 734–738. doi: 10.1109/72.846744
12. Hoppensteadt F. C., Izhikevich E. M. Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82, iss. 14. P. 2983. doi: 10.1103/PhysRevLett.82.2983
13. Csaba G., Porod W. Coupled oscillators for computing: A review and perspective // *Appl. Phys. Rev.* 2020. Vol. 7, iss. 1. P. 011302. doi: 10.1063/1.5120412
14. Two-dimensional mutually synchronized spin Hall nano-oscillator arrays for neuromorphic computing / M. Zahedinejad, A. A. Awad, S. Muralidhar, R. Khymyn, H. Fulara, H. Mazraati, M. Dvornik, J. Åkerman // *Nat. nanotechnology.* 2020. Vol. 15, iss. 1. P. 47–52. doi: 10.1038/s41565-019-0593-9
15. Antiferromagnetic spin textures and dynamics / O. Gomonay, V. Baltz, A. Brataas, Y. Tserkovnyak // *Nat. Phys.* 2018. Vol. 14, iss. 3. P. 213–216. doi: 10.1038/s41567-018-0049-4
16. Cheng R., Xiao D., Brataas A. Terahertz antiferromagnetic spin Hall nano-oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, iss. 20. P. 207603. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.207603
17. Electrically tunable detector of THz-frequency signals based on an antiferromagnet / A. Safin, V. Puliafito, M. Carpentieri, G. Finocchio, S. Nikitov, P. Stremoukhov, A. Kirilyuk, V. Tyberkevych, A. Slavin // *Appl. Phys. Lett.* 2020. Vol. 117, iss. 22. P. 222411. doi: 10.1063/5.0031053
18. Ultra-fast logic devices using artificial "neurons" based on antiferromagnetic pulse generators / O. Sulymenko, O. Prokopenko, I. Lisenkov, J. Åkerman, V. Tyberkevych, A. N. Slavin, R. Khymyn // *J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 124, iss. 15. P. 152115. doi: 10.1063/1.5042348
19. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena / J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, R. Spigler // *Reviews of modern physics.* 2005. Vol. 77, iss. 1. P. 137. doi: 10.1103/RevModPhys.77.137
20. Trees B. R., Saranathan V., Stroud D. Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, iss. 1. P. 016215. doi: 10.1103/PhysRevE.71.016215
21. Kuramoto-model-based data classification using the synchronization dynamics of uniform-mode spin Hall nano-oscillators / N. Garg, S. V. H. Bhotla, P. K. Muduli, D. Bhowmik // *Neuromorphic Computing and Engineering.* 2021. Vol. 1, iss. 2. P. 024005. doi: 10.1088/2634-4386/ac3258
22. Synchronization in complex networks / A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Morenob, C. Zhou // *Phys. Rep.* 2008. Vol. 469, iss. 3. P. 93–153. doi: 10.1016/j.physrep.2008.09.002
23. Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // *Chaos.* 2009. Vol. 19, iss. 4. P. 043104. doi: 10.1063/1.3247089
24. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Physical review letters.* 2008. Vol. 101, iss. 26. P. 264103. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.264103
25. Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current / R. Khymyn, I. Lisenkov, V. Tyberkevich, B. A. Ivanov, A. Slavin // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, iss. 1. P. 1–10. doi: 10.1038/srep43705
26. Ultra-fast artificial neuron: generation of picosecond-duration spikes in a current-driven antiferromagnetic auto-oscillator / R. Khymyn, I. Lisenkov, J. Voorheis, O. Sulymenko, O. Prokopenko, V. Tyberkevich, J. Åkerman, A. Slavin // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, iss. 1. P. 1–9. doi: 10.1038/s41598-018-33697-0

27. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

28. Капранов М. В. Теория колебаний в радио-технике. М.: Наука, 1984. 320 с.

Информация об авторах

Митрофанова Анастасия Юрьевна – студентка 1-го курса магистратуры кафедры твердотельной электроники, радиофизики и прикладных информационных технологий Московского физико-технического институт. Инженер ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Сфера научных интересов – нелинейная динамика; нейроморфные вычисления; спинтроника.

Адрес: ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, ул. Моховая, д.11, кор.7, Москва, 125009, Россия

E-mail: nastya_mitrofanova_2000@mail.ru

Сафин Ансар Ризаевич – кандидат технических наук по специальности "Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения" (2014), доцент, заведующий кафедрой формирования и обработки радиосигналов НИУ "МЭИ", старший научный сотрудник ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 50 научных работ. Сфера научных интересов – радиофизика и электроника; физика магнитных явлений, спинтроника.

Адрес: ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, ул. Моховая, д.11, кор.7, Москва, 125009, Россия

E-mail: arsaфин@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6507-6573>

Кравченко Олег Викторович – научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН. Инженер ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Сфера научных интересов – вейвлет-анализ; уравнения математической физики; численные методы.

Адрес: ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, ул. Моховая, д.11, кор.7, Москва, 125009, Россия

E-mail: olekravchenko@gmail.com

Никитов Сергей Аполлонович – академик РАН (2022), директор ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, доктор физико-математических наук (1991), профессор (1995) МФТИ. Автор более 400 научных работ. Сфера научных интересов – радиофизика и физическая электроника; физика магнитных явлений; спинтроника и магнотроника.

Адрес: ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, ул. Моховая, д.11, кор.7, Москва, 125009, Россия

E-mail: nikitov@cplire.ru

References

1. Oliveira H. M., Melo L. V. Huygens Synchronization of Two Clocks. *Sci. Rep.* 2015, vol. 5, iss. 1, pp. 1–12. doi: 10.1038/srep11548

2. Ramirez J. P., Olvera L. A., Nijmeijer H., Alvarez J. The Sympathy of Two Pendulum Clocks: Beyond Huygens' Observations. *Sci. Rep.* 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 1–16. doi: 10.1038/srep23580

3. Glass L. Synchronization and Rhythmic Processes in Physiology. *Nature.* 2001, vol. 410, iss. 6825, pp. 277–284. doi: 10.1038/35065745

4. Liu C., Weaver D. R., Strogatz S. H., Reppert S. M. Cellular Construction of a Circadian Clock: Period Determination in the Suprachiasmatic Nuclei. *Cell.* 1997, vol. 91, iss. 6, pp. 855–860. doi: 10.1016/S0092-8674(00)80473-0

5. Buck J. Synchronous Rhythmic Flashing Of Fireflies. II. *The Quarterly Review of Biology.* 1988, vol. 63, iss. 3, pp. 265–289. doi: 10.1086/415929

6. Changchao L., Zhongjian K. Research on the Frequency Synchronization Control Strategy for Power System. *Intern. J. of Electrical Power & Energy Systems.* 2022, vol. 134, p. 107407. doi: 10.1016/j.ijepes.2021.107407

7. Kurenkov A., Fukami S., Ohno H. Neuromorphic Computing with Antiferromagnetic Spintronics. *J. Appl. Phys.* 2020, vol. 128, iss. 1, p. 010902. doi: 10.1063/5.0009482

8. Grollier J., Querlioz D., Camsari K. Y., Everschor-Sitte K., Fukami S., Stiles M. D. Two-Dimensional Mutually Synchronized Spin Hall Nano-Oscillator Arrays for Neuromorphic Computing. *Nat.*

electronics. 2020, vol. 3, iss. 7, pp. 360–370. doi: 10.1038/s41928-019-0360-9

9. Tsunegi S., Taniguchi T., Lebrun R., Yakushiji K., Cros V., Grollier J., Fukushima A., Yuasa S., Kubota H. Scaling Up Electrically Synchronized Spin Torque Oscillator Networks. *Sci. Rep.* 2018, vol. 8, iss. 1, pp. 1–7. doi: 10.1038/s41598-018-31769-9

10. Dieny B., Prejbeanu I. L., Garello K., et al. Opportunities and Challenges for Spintronics in the Microelectronics Industry. *Nat. Electronics.* 2020, vol. 3, iss. 8, pp. 446–459. doi: 10.1038/s41928-020-0461-5

11. Hoppensteadt F. C., Izhikevich E. M. Pattern Recognition via Synchronization in Phase-Locked Loop Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2000, vol. 11, iss. 3, pp. 734–738. doi: 10.1109/72.846744

12. Hoppensteadt F. C., Izhikevich E. M. Oscillatory Neurocomputers with Dynamic Connectivity. *Phys. Rev. Lett.* 1999, vol. 82, iss. 14, p. 2983. doi: 10.1103/PhysRevLett.82.2983

13. Csaba G., Porod W. Coupled Oscillators for Computing: A Review and Perspective. *Appl. Phys. Rev.* 2020, vol. 7, iss. 1, p. 011302. doi: 10.1063/1.5120412

14. Zahedinejad M., Awad A. A., Muralidhar S., Khymyn R., Fulara H., Mazraati H., Dvornik M., Åkerman J. Two-Dimensional Mutually Synchronized Spin Hall Nano-Oscillator Arrays for Neuromorphic Computing. *Nat. Nanotechnology.* 2020, vol. 15, iss. 1, pp. 47–52. doi: 10.1038/s41565-019-0593-9

15. Gomonay O., Baltz V., Brataas A., Tserkovnyak Y. Antiferromagnetic Spin Textures and Dynamics. *Nat. Phys.* 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 213–216. doi: 10.1038/s41567-018-0049-4
16. Cheng R., Xiao D., Brataas A. Terahertz Antiferromagnetic Spin Hall Nano-Oscillator. *Phys. Rev. Lett.* 2016, vol. 116, iss. 20, p. 207603. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.207603
17. Safin A., Puliafito V., Carpentieri M., Finocchio G., Nikitov S., Stremoukhov P., Kirilyuk A., Tyberkevych V., Slavin A. Electrically Tunable Detector of THz-Frequency Signals Based on an Antiferromagnet. *Appl. Phys. Lett.* 2020, vol. 117, iss. 22, p. 222411. doi: 10.1063/5.0031053
18. Sulymenko O., Prokopenko O., Lisenkov I., Åkerman J., Tyberkevych V., Slavin A. N., Khymyn R. Ultra-Fast Logic Devices Using Artificial "Neurons" Based on Antiferromagnetic Pulse Generators. *J. Appl. Phys.* 2018, vol. 124, iss. 15, p. 152115. doi: 10.1063/1.5042348
19. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto Model: A Simple Paradigm for Synchronization Phenomena. *Reviews of Modern Physics.* 2005, vol. 77, iss. 1, p. 137. doi: 10.1103/RevModPhys.77.137
20. Trees B. R., Saranathan V., Stroud D. Synchronization in Disordered Josephson Junction Arrays: Small-World Connections and the Kuramoto Model. *Phys. Rev. E.* 2005, vol. 71, iss. 1, p. 016215. doi: 10.1103/PhysRevE.71.016215
21. Garg N., Bhotla S. V. H., Muduli P. K., Bhowmik D. Kuramoto-Model-Based Data Classification Using the Synchronization Dynamics of Uniform-Mode Spin Hall Nano-Oscillators. *Neuromorphic Computing and Engineering.* 2021, vol. 1, iss. 2, p. 024005. doi: 10.1088/2634-4386/ac3258
22. Arenasab A., Díaz-Guilera A., Kurthsde J., Morenobf Y., Zhou C. Synchronization in Complex Networks. *Phys. Rep.* 2008, vol. 469, iss. 3, pp. 93–153. doi: 10.1016/j.physrep.2008.09.002
23. Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Identical Phase Oscillators with Global Sinusoidal Coupling Evolve by Möbius Group Action. *Chaos.* 2009, vol. 19, iss. 4, p. 043104. doi: 10.1063/1.3247089
24. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially Integrable Dynamics of Hierarchical Populations of Coupled Oscillators. *Physical Review Letters.* 2008, vol. 101, iss. 26, p. 264103. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.264103
25. Khymyn R., Lisenkov I., Tiberkevich V., Ivanov B. A., Slavin A. Antiferromagnetic THz-Frequency Josephson-Like Oscillator Driven by Spin Current. *Sci. Rep.* 2017, vol. 7, iss. 1, pp. 1–10. doi: 10.1038/srep43705
26. Khymyn R., Lisenkov I., Voorheis J., Sulymenko O., Prokopenko O., Tiberkevich V., Åkerman J., Slavin A. Ultra-Fast Artificial Neuron: Generation of Picosecond-Duration Spikes in a Current-Driven Antiferromagnetic Auto-Oscillator. *Sci. Rep.* 2018, vol. 8, iss. 1, pp. 1–9. doi: 10.1038/s41598-018-33697-0
27. Naife A. *Metody vozmushchenii* [Perturbation Methods]. Moscow, Mir, 1976, 456 p. (In Russ.)
28. Kapranov M. V. *Teoriya kolebanii v radio-tekhnikе* [Theory of Oscillations in Radio Engineering]. Moscow, Nauka, 1984, 320 p. (In Russ.)

Information about the authors

Anastasia Yu. Mitrofanova, student of the 1st year of Master degree of the Department of Solid-state electronics, radiophysics and applied information technologies of the Moscow Institute of Physics and Technologies. Engineer of the Kotelnikov IRE RAS. Area of expertise: nonlinear dynamics; neuromorphic computing; spintronics. Address: Kotelnikov IRE RAS, 11, Mokhovaya St., build. 7, Moscow 125009, Russia
E-mail: nastya_mitrofanova_2000@mail.ru

Ansar R. Safin, Cand. Sci. (Eng.) in the specialty "Radio engineering including television systems and devices" (2014), Head of the Department of Radio Signal Generation and Processing, NRU "MPEI", senior researcher at the Kotelnikov IRE RAS. The author of more than 50 scientific publications. Area of expertise: radiophysics and electronics; physics of magnetic phenomena; spintronics. Address: Kotelnikov IRE RAS, 11, Mokhovaya St., build. 7, Moscow 125009, Russia
E-mail: arsafrin@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6507-6573>

Oleg V. Kravchenko, researcher of the Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences. Engineer of the Kotelnikov IRE RAS. Area of expertise: wavelet analysis, equations of mathematical physics, numerical methods. Address: Kotelnikov IRE RAS, 11, Mokhovaya St., build. 7, Moscow 125009, Russia
E-mail: olekravchenko@gmail.com

Sergey A. Nikitov, Academician of the Russian Academy of Sciences (2022), Director of the Kotelnikov IRE RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1991), Professor (1995) of the Moscow Institute of Physics and Technology. The author of more than 400 scientific publications. Area of expertise: radiophysics and physical electronics, physics of magnetic phenomena, spintronics and magnonics, Address: Kotelnikov IRE RAS, 11, Mokhovaya St., build. 7, Moscow 125009, Russia
E-mail: nikitov@cplire.ru