

С. И. Зиатдинов  
Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

## Синтез фазовращателя комплексного сигнала

*Предложен алгоритм построения фазовращателя для комплексного сигнала, обеспечивающего любой, но постоянный фазовый сдвиг квадратурных составляющих в заданном диапазоне частот. Для поворота фазы комплексного сигнала необходимо все его спектральные составляющие сдвинуть по фазе на заданный угол. Показано, что фазовращатель комплексного сигнала является комплексным фильтром, импульсная характеристика которого содержит вещественную и мнимую составляющие. На основе интеграла наложения для конкретных примеров рассчитаны квадратурные составляющие комплексных выходных сигналов фазовращателя.*

### Комплексный сигнал, фазовращатель, фазовый сдвиг, импульсная характеристика

Комплексные сигналы наряду с действительными сигналами достаточно широко используются в разнообразных системах обработки информации [1], [2].

В общем виде комплексный сигнал можно представить в форме  $z(t) = x(t) + jy(t)$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – вещественная и мнимая части комплексного сигнала.

Рассмотрим вопрос синтеза фильтра-фазовращателя, обладающего постоянными коэффициентом передачи, равным единице, и фазовым сдвигом  $\varphi_0$  в диапазоне частот  $\omega_H \dots \omega_B$ , где  $\omega_H$ ,  $\omega_B$  – нижняя и верхняя частоты.

Известно [3], что сигнал любой формы можно на основании преобразования Фурье представить в виде бесконечной суммы элементарных гармонических колебаний, каждое из которых имеет свою амплитуду, частоту и начальную фазу:

$$z(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Z_i e^{j(\omega_i t + \varphi_i)}, \quad (1)$$

где  $Z_i$  – амплитуда;  $\omega_i$  – мгновенная круговая частота;  $\varphi_i$  – начальная фаза элементарного гармонического колебания.

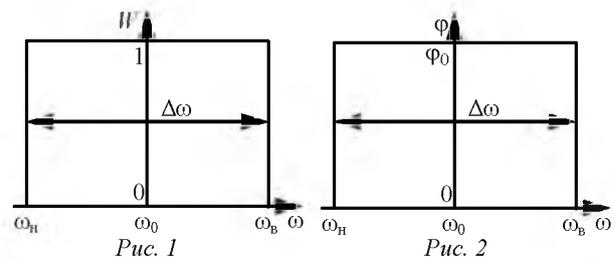
Для изменения фазы комплексного сигнала (1) на угол  $\varphi_0$  достаточно его умножить на коэффициент  $e^{j\varphi_0}$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} z_{\varphi}(t) &= \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} Z_i e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} \right] e^{j\varphi_0} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} Z_i e^{j(\omega_i t + \varphi_i + \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для изменения фазы комплексного сигнала необходимо все его гармонические составляющие как в области положительных, так и в области отрицательных частот повернуть по фазе на угол  $\varphi_0$ . В этом случае амплитудно-частотная характеристика фазовращателя  $W(\omega)$  будет иметь вид, показанный на рис. 1, а его фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega)$  – вид, показанный на рис. 2, где

$$\Delta = \omega_B - \omega_H; \quad \omega_0 = (\omega_B + \omega_H)/2$$

– ширина и средняя частота передаточной функции фазовращателя соответственно.



Найдем импульсную характеристику фазовращателя при  $W(\omega) = 1$  и  $\varphi(\omega) = \varphi_0$  в диапазоне  $\omega_H \dots \omega_B$  и  $W(\omega) = 0$  вне этого диапазона:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_B} e^{j(\omega t + \varphi_0)} d\omega. \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

получим:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_B} \cos(\omega t + \varphi_0) d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_B} \sin(\omega t + \varphi_0) d\omega.$$

После ряда тригонометрических преобразований запишем:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \left[ \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + j \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \right] = h_x(t) + j h_y(t),$$

где

$$h_x(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$h_y(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

– квадратурные составляющие комплексной импульсной характеристики фазовращателя.

В частном случае при  $\omega_0 = 0$  :

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega}{2} t (\cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0).$$

Комплексный выходной сигнал фазовращателя находится из соотношения [3]

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) z(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [h_x(\tau) + j h_y(\tau)] [x(t-\tau) + j y(t-\tau)] d\tau.$$

Проведя необходимые преобразования, запишем:

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t [h_x(\tau) x(t-\tau) - h_y(\tau) y(t-\tau)] d\tau + j \int_{-\infty}^t [h_x(\tau) y(t-\tau) + h_y(\tau) x(t-\tau)] d\tau = x_{\text{ВЫХ}}(t) + j y_{\text{ВЫХ}}(t),$$

где

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t [h_x(\tau) x(t-\tau) - h_y(\tau) y(t-\tau)] d\tau;$$

$$y_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t [h_x(\tau) y(t-\tau) + h_y(\tau) x(t-\tau)] d\tau$$

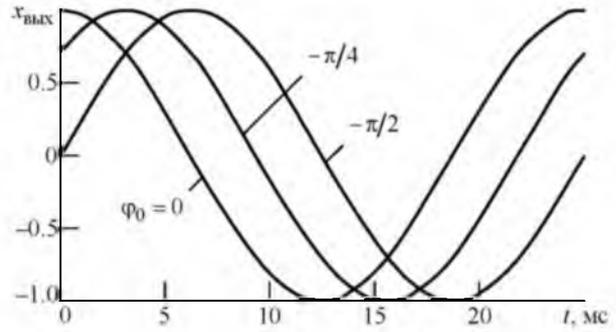


Рис. 3

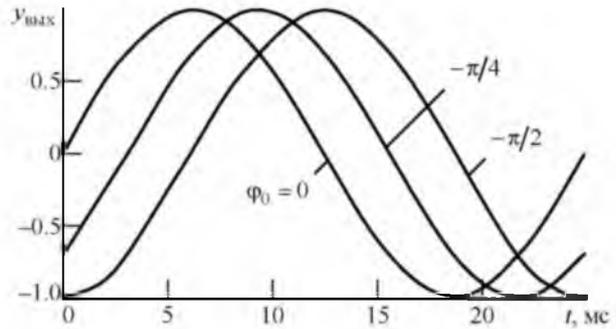


Рис. 4

– квадратурные составляющие комплексного выходного сигнала фазовращателя.

При расчетах выходных сигналов фазовращателя полагалось  $f_B = \omega_B / (2\pi) = 100$  Гц;  $z(t) = \cos \omega_c t + j \sin \omega_c t$ ;  $f_c = \omega_c / (2\pi) = 40$  Гц – частота входного сигнала фазовращателя.

Расчеты проведены при  $\omega_0 = 0$  для фазовых сдвигов  $\varphi_0 = 0, -\pi/4$  и  $-\pi/2$ . На рис. 3 изображен выходной сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ , а на рис. 4 – выходной сигнал  $y_{\text{ВЫХ}}(t)$ .

Проведенное моделирование подтвердило правильность теоретических положений.

Таким образом, фазовращатель комплексного сигнала представляет собой комплексный фильтр, импульсная характеристика которого содержит вещественную и мнимую составляющие.

Полученная импульсная характеристика фазовращателя позволяет, используя интеграл наложения, сравнительно легко вычислить квадратурные составляющие выходного сигнала для заданного фазового сдвига.

Рассмотренный фазовращатель может быть использован в разнообразных задачах обработки сигналов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Ефимов Н. Б., Зиятдинов С. И. Микропроцессорные системы автоматического управления. Л.: Машиностроение, 1988. 365 с.
2. Зиятдинов С. И., Осипов Л. А. Цифровая модель контура автокомпенсатора частоты Доплера помехового сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48, № 12. С. 21–24.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

S. I. Ziatdinov

Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation

### Synthesis of the phase shifter for complex signal

*It is proposed algorithm for construction of the phase shifter for complex signal, which gives any but constant the phase shift for square component in given range of the frequency. For rotation of the complex signal phase we must all him spectral components to shift on phase in assigned angle. It is showed, that the phase shifter of complex signal is be the complex filter, whose impulsive characteristic has the real and not real components. By the integral of imposition for concrete examples has been calculated the square components of complex output signal of the phase shifter.*

Complex signal, phase shifter, phase shift, impulse characteristic

Статья поступила в редакцию 7 октября 2014 г.

УДК 621.396.1

В. Н. Ушаков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Спектральный подход к определению условий применения теоремы Котельникова

*Рассмотрены особенности применения теоремы Котельникова в отношении сигналов с финитным спектром, у которых значение спектральной плотности на верхней граничной частоте отлично от нуля. Проанализирован феномен дискретизации гармонического колебания в случае, когда частота дискретизации равна удвоенной верхней частоте в спектре сигнала.*

### Теорема Котельникова, дискретизация

Анализируя формулировки теоремы Котельникова, приведенные, например, в [1], [2], легко заметить, что они не дают однозначного ответа на вопрос о том, может ли в финитном спектре  $\hat{S}(\omega)$  квадратично интегрируемого сигнала  $S(t)$  содержаться компонент с частотой  $\omega_m$ , ограничивающей сверху указанный спектр. Так, при одинаковом значении минимального интервала дискретизации  $T = \pi/\omega_m$  в [1] на поставленный вопрос дается отрицательный ответ, а в [2] – ему противоположный. Обращение к [3] не проясняет ситуации, поскольку в отношении сигнала  $S(t)$  предполагается, что это есть функция, "состоящая из частот от 0 до  $\omega_m$ ".

Еще более остро этот вопрос встает при рассмотрении гармонических колебаний, не облада-

ющих конечной энергией. В частности, в [4] в качестве примера дискретизации непрерывного сигнала с ограниченным спектром приводится представление отсчетными значениями функции  $S(t) = \cos(\omega_m t)$ . Отсчеты следуют с интервалом  $T = \pi/\omega_m$  и берутся в точках, где  $S(t) = \pm 1$ , что в принципе позволяет восстановить исходное колебание. С другой стороны, условия теоремы Котельникова накладывают ограничения лишь на величину интервала дискретизации  $T$ , допуская формирование отсчетов в произвольные моменты времени. При этом рассматриваемое колебание  $S(t) = \cos(\omega_m t)$  при сохранении предписанного теоремой периода дискретизации может быть представлено последовательностью нулевых отсчетов, не позволяющих