

Радиолокация и радионавигация

УДК 621.396.967.2

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2020-23-6-59-69>

## Компенсация ошибок оценивания местоположения, вызванных тропосферным распространением радиоволн, в широкозонных мультilaterационных системах

А. А. Монаков<sup>1</sup>✉, А. М. Миролюбов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Закрытое акционерное общество "Азимут–Альянс", Санкт-Петербург, Россия

✉ [a\\_monakov@mail.ru](mailto:a_monakov@mail.ru)

### Аннотация

**Введение.** Широкозонные мультilaterационные системы навигации (Wide Area Multilateration, WAM) являются основным конкурентом комплексов вторичной радиолокации систем управления воздушным движением. Принцип работы WAM-систем заключается в измерении псевдодальностей сигнала бортового ответчика воздушного судна системой разнесенных в пространстве приемных станций и последующей оценке местоположения. Одним из существенных факторов, влияющих на точность оценки местоположения воздушного судна (ВС), является тропосферная рефракция. Рефракция приводит к увеличению длины оптического пути сигнала, а следовательно, и измеряемых псевдодальностей. Следствием этого является появление дополнительного смещения у оценок местоположения ВС. При этом недопустимо большие значения смещения получаются при оценке высоты.

**Цель работы.** Получение математической модели сигналов приемных станций WAM-системы, которая учитывает особенности тропосферного распространения радиоволн, и синтез алгоритма оценки местоположения ВС с компенсацией тропосферных ошибок при оценивании псевдодальностей.

**Материалы и методы.** Методом геометрической оптики получены уравнения, позволяющие рассчитать ошибки измерения псевдодальностей, вызванные рефракцией в сферически слоистой тропосфере.

**Результаты.** Предложена математическая модель формирования оценок псевдодальностей, учитывающая тропосферную рефракцию. Анализ модели показал, что ошибки измерения псевдодальностей линейно зависят от расстояния между ответчиком ВС и приемным пунктом. Этот вывод позволил синтезировать алгоритм оценивания местоположения ВС с компенсацией тропосферных ошибок. Синтезированный алгоритм позволяет полностью избавиться от смещения у оценок местоположения ВС при увеличении СКО оценки высоты на 60 % и сохранении этого параметра в допустимых для WAM-систем пределах.

**Заключение.** Полученные в статье математическая модель сигналов WAM-системы, учитывающая ошибки тропосферного распространения радиоволн при оценке псевдодальностей, и алгоритм оценивания местоположения ВС с компенсацией тропосферных ошибок могут быть использованы при разработке многопозиционных навигационных систем.

**Ключевые слова:** стандартная атмосфера, тропосферная рефракция, длина оптического пути, широкозонная мультilaterационная система навигации, ошибки измерения псевдодальности

**Для цитирования:** Монаков А. А., Миролюбов А. М. Компенсация ошибок оценивания местоположения, вызванных тропосферным распространением радиоволн, в широкозонных мультilaterационных системах // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2020. Т. 23, № 6. С. 59–69. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-6-59-69

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 25.10.2020; принята к публикации после рецензирования 27.11.2020; опубликована онлайн 29.12.2020



## Compensation of Positioning Errors Caused by Tropospheric Wave Propagation in Wide-Area Multilateration Systems

Andrey A. Monakov<sup>1</sup>✉, Aleksandr M. Mirolubov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI),  
St Petersburg, Russia

<sup>2</sup> JSC "Azimut–Alliance", St Petersburg, Russia

✉ a\_monakov@mail.ru

### Abstract

**Introduction.** Wide area multilateration (WAM) systems are the main competitors of secondary surveillance radar (SSR) systems used in air traffic control (ATC). The general principle of WAM operation is based on the assessment of pseudoranges between a signal source (an aircraft airborne transponder) and the ground receivers with precisely known geographical coordinates deployed over the ATC area. The aircraft position is estimated by measuring pseudoranges. A significant factor affecting the accuracy of aircraft positioning is tropospheric refraction, a phenomenon caused by the inhomogeneity of the earth's atmosphere and manifested in a deviation in the direction of the rays along which the signal of an aircraft transponder propagates. Refraction increases the lengths of ray paths, thus increasing the corresponding pseudoranges. As a result, the estimate of the aircraft position receives an additional bias. Altitude estimates produce unreasonably large errors.

**Aim.** To develop a mathematical model for the signals received by a WAM system, which accounts for tropospheric wave propagation, as well as to derive an algorithm for aircraft positioning with compensated tropospheric errors.

**Materials and methods.** Equations for the pseudorange estimation errors caused by wave propagation in a spherically stratified atmosphere were derived using the method of geometrical optics.

**Results.** This paper proposed a mathematical model for pseudorange estimates in WAM systems, which accounts for the bias associated with the phenomenon of tropospheric refraction. An analysis of the proposed model showed that pseudorange errors depend linearly on the distance between the aircraft transponder and the receiver. This conclusion allowed an algorithm for aircraft positioning with compensated tropospheric errors to be developed. The proposed algorithm yields an unbiased estimate of the aircraft position. The standard deviation of altitude estimates increases by 60%, although remaining within the limits permissible for WAM systems.

**Conclusions.** The developed mathematical model of WAM signals, which considers tropospheric propagation errors in pseudorange estimation, as well as the algorithm for aircraft positioning with compensated tropospheric errors, can be used in the development of spatially distributed navigation systems.

**Keywords:** standard atmosphere, tropospheric refraction, optical path length, wide area multilateration navigation system, pseudorange estimation errors

**For citation:** Monakov A. A., Mirolubov A. M. Compensation of Positioning Errors Caused by Tropospheric Wave Propagation in Wide-Area Multilateration Systems. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2020, vol. 23, no. 6, pp. 59–69. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-6-59-69

**Conflict of interest.** Authors declare no conflict of interest.

Submitted 25.10.2020; accepted 27.11.2020; published online 29.12.2020

**Введение.** Широкозонные мультilaterационные (Wide Area Multilateration) системы (далее – WAM-системы) в настоящее время являются главными конкурентами радиолокационных комплексов, используемых при управления воздушным движением [1], поскольку имеют следующие неоспоримые преимущества:

- возможность покрытия больших пространств, в том числе со сложным рельефом местности;
- низкую стоимость оборудования, размещения и эксплуатационных расходов;
- высокую надежность и помехозащищенность.

Важнейшим вопросом при создании WAM-систем является их точность. В настоящее

время предложено большое количество алгоритмов оценки местоположения (МП) воздушных судов (ВС), которые дают возможность решить главную задачу навигации с точностью, близкой к потенциально достижимой для этой категории радионавигационных систем (см. [2–6] и ссылки в этих работах). Классификация и краткая характеристика предложенных методов дана в [4–6]. Однако предложенные алгоритмы были синтезированы без учета явлений, сопровождающих распространение радиосигналов в околоземном слое атмосферы – тропосфере. Этот слой представляет собой неоднородную и неизотропную среду, электрические параметры которой меняются в зависимости от физического состояния тропосферы и высоты над поверхностью Земли. Вследствие этого скорость распространения радиоволн в тропосфере становится меньше скорости света в вакууме и меняется в зависимости от высоты ВС и физического состояния тропосферы. Кроме того, лучи, вдоль которых распространяются радиоволны в такой среде, искривляются. Возникает явление рефракции, приводящее к увеличению оптической длины пути, проходимого радиоволнами от точки излучения до точки приема.

Изучение влияния рефракции на качество функционирования радиотехнических систем является до настоящего времени актуальной проблемой. Интерес к ней вырос за последние годы в связи с интенсивным развитием высокоточных радионавигационных и радиолокационных систем: спутниковая навигация [7, 8], радиолокаторы с синтезированной апертурой антенны [9, 10], многопозиционные навигационные системы [11–13].

Статья посвящена анализу ошибок оценки МП ВС в WAM-системе, которые возникают из-за тропосферного распространения, а также синтезу алгоритма оценки с компенсацией этих ошибок. Приведены краткие сведения о моделях тропосферы, которые могут быть использованы для расчета ошибок, получена система уравнений, совместное решение которых позволяет вычислить длину оптического пути при прохождении радиосигнала между точками пространства, где расположены передатчик и приемник, а также приведены результаты расчетов длин оптического пути и результаты моделирования оценки МП ВС в условиях тропосферного прохождения радиосигналов. На основании сделанных расчетов

предложена модель тропосферного распространения, которая используется для синтеза алгоритма оценивания МП ВС. Синтезированный алгоритм позволяет компенсировать тропосферные ошибки распространения. Доказательства этого, полученные методом математического моделирования, также приведены в статье.

**Модели стандартной атмосферы.** Атмосферу Земли в зависимости от высоты  $H$  над поверхностью принято делить на слои. Деление атмосферы на слои объясняется существенным различием их физических свойств. Это различие обусловлено различиями в механизме нагрева воздуха, действием поля силы тяжести, наличием паров воды, а также механизмом ионизации воздуха. В зависимости от распределения температуры воздуха в атмосфере принято выделять следующие слои: тропосфера ( $0 \leq H \leq 11$ ) км; стратосфера ( $25 \leq H \leq 47$ ) км; мезосфера ( $53 \leq H \leq 79$ ) км; термосфера ( $90 \leq H \leq 105$ ) км. Между тропосферой и стратосферой находится тропопауза, где температура воздуха примерно постоянна и не зависит от высоты. Поскольку полеты ВС происходят на высотах до 16 км, на функционирование WAM-систем основное влияние оказывают тропосфера и тропопауза.

В связи с тем, что распределение физических параметров атмосферы по высоте носит сложный характер, который к тому же изменяется во времени, для расчета используется модель стандартной атмосферы, которая рекомендована Международной организацией гражданской авиации (International Civil Aviation Organization, ICAO) [14]. Модель стандартной атмосферы представляет собой совокупность значений наиболее важных физических параметров атмосферы, установленных в результате большого числа наблюдений, а также физических законов, определяющих взаимную связь этих параметров с другими характеристиками атмосферы. Основными параметрами, установленными для стандартной атмосферы на высоте среднего уровня моря, являются:

- ускорение свободного падения  $g_0 = 9.80665 \text{ м/с}^2$ ;
- атмосферное давление  $p_0 = 1011325 \text{ Па}$ ;
- плотность атмосферы  $\rho_0 = 1.225 \text{ кг/м}^3$ ;
- температура  $T_0 = 288.15 \text{ К}$ ;

- скорость звука  $a_0 = 340.294$  м/с;
- градиент уменьшения температуры воздуха в тропосфере  $\beta_T = -0.0065$  К/м.

Для стандартной атмосферы принята модель линейного уменьшения температуры с увеличением  $H$  до высоты тропопаузы  $H_{\text{тр}} = 11$  км. На высотах выше тропопаузы считается, что температура воздуха не меняется. Таким образом, уравнение, описывающее изменение температуры с высотой, имеет вид

$$T(H) = \begin{cases} T_0 + \beta_T (H - H_0), & H_0 \leq H \leq H_{\text{тр}}; \\ T_0 + \beta_T (H_{\text{тр}} - H_0), & H_{\text{тр}} \leq H, \end{cases} \quad (1)$$

где  $T_0$  – температура воздуха на высоте  $H_0$ , за которую принята высота среднего уровня моря.

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, с учетом (1) получим первое уравнение, описывающее состояние воздуха в статической атмосфере:

$$p(H) = R\rho(H)T(H), \quad (2)$$

где  $\rho(H)$  – плотность воздуха на высоте  $H$ ;  $R = 287.05287$  м<sup>2</sup>/(К·с<sup>2</sup>) – универсальная газовая постоянная.

Для определения давления воздуха в атмосфере рассмотрим цилиндрический объем высотой  $dH$ , площадь основания которого равна 1 м<sup>2</sup>. Для того чтобы этот объем оставался в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, приложенных к нему, была равна нулю. Если атмосферное давление на нижнее основание равно  $p$ , а давление на верхнее  $p + dp$ , то уравнение для равнодействующей силы будет иметь вид

$$[p + dp + g_0\rho(H)dH] - p = 0.$$

Отсюда получим второе уравнение, описывающее состояние воздуха в статической атмосфере:

$$\frac{dp}{dH} = -g_0\rho(H). \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) позволяют определить, как изменяется с высотой давление воздуха. Для этого разделим (3) на (2) и (1). В результате получается дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$p(H) = \begin{cases} p_0 \left[ 1 + \frac{\beta_T}{T_0} (H - H_0) \right]^{-\frac{g_0}{\beta_T R}}, & H_0 \leq H \leq H_{\text{тр}}; \\ p_0 \exp \left[ -\frac{g_0}{RT_0} (H - H_0) \right], & H_{\text{тр}} \leq H. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (1) и (4) позволяют рассчитать показатель преломления воздуха атмосферы  $n$ . Поскольку значение  $n$  мало отличается от единицы, удобно ввести индекс рефракции

$$N = (n - 1)10^6.$$

Для расчета индекса рефракции Международный союз электросвязи (International Telecommunication Union, ITU) определил следующее эмпирическое уравнение [15]:

$$N = \frac{77.6}{T} \left( p + 4810 \frac{e}{T} \right), \quad (5)$$

где атмосферное давление  $p$  и давление паров воды  $e$  должны выражаться в гектопаскалях, а температура  $T$  – в Кельвинах. На рис. 1 представлены зависимости температуры и давления от высоты  $H$  для стандартной атмосферы, а также зависимость  $N = N(H)$  при относительной влажности воздуха  $e = 60$  %, построенная в соответствии с (5). Штрихами на рисунке приведена кривая для индекса рефракции, построенная в соответствии с

$$N(H) = N_0 \exp[-H/H_0], \quad (6)$$

где  $N_0 = 315$ ,  $H_0 = 7.35$  км. Выражение (6) также рекомендовано МСЭ и, как следует из рис. 1, может быть использовано для получения приближенных оценок индекса рефракции вблизи поверхности.

Изменение коэффициента преломления воздуха атмосферы с высотой приводит к одному очень важному явлению – рефракции. Рефракцией в атмосфере называется явление искривления траектории луча, вдоль которого происходит распространение радиоволны. Рефракция радиоволн в тропосфере приводит к тому, что фактическая длина пути, проходимого сигналом между точками излучения и приема, становится больше геометрического расстояния между ними. Определим, насколько длина оптического пути может

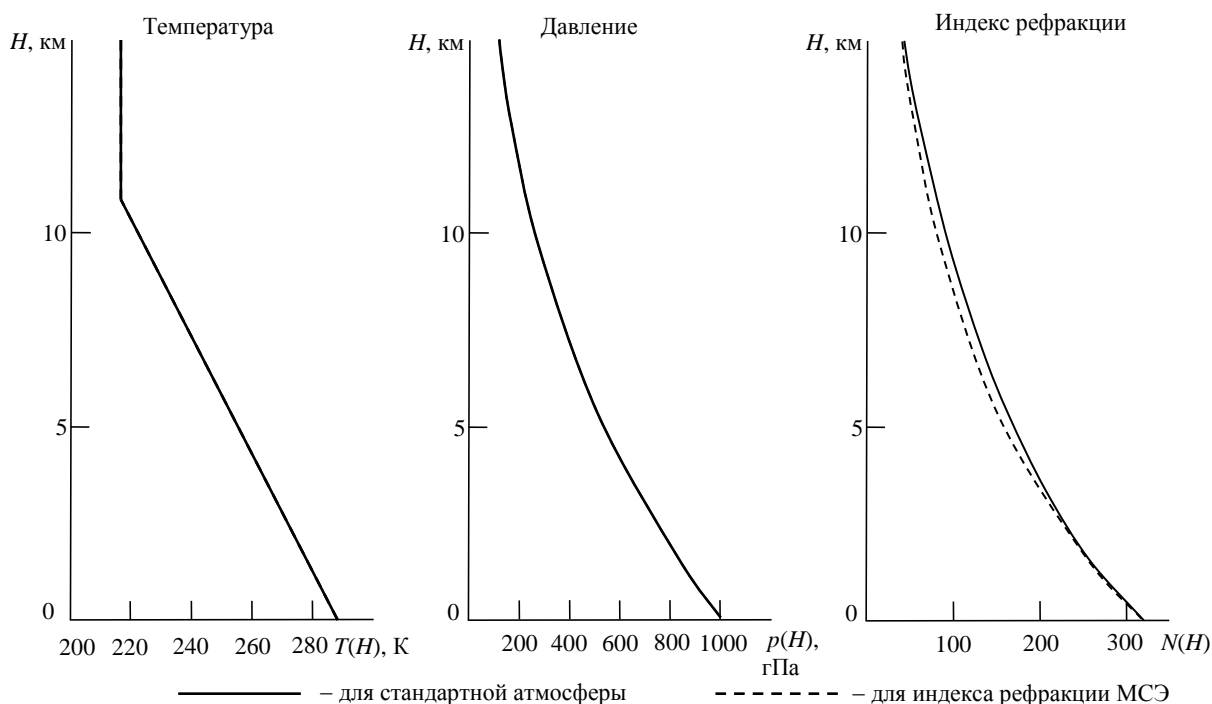


Рис. 1. Зависимости температуры, давления и индекса рефракции от высоты  
Fig. 1. Graphics of geometric altitude against temperature, pressure and index of refraction

превосходить расстояния между точками излучения и приема. Для этого сделаем следующие предположения:

- показатель преломления  $n(x, y, z)$  – плавно меняющаяся функция пространственных координат;
- длина волны  $\lambda$  значительно меньше пространственного масштаба изменений показателя преломления среды распространения  $n(x, y, z)$ ;

–  $n(x, y, z) = n(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , т. е. волна распространяется в сферически-слоистой атмосфере, параметры которой (температура, давление, влажность) зависят только от высоты над поверхностью;

– Земля представляет собой сфероид, радиус которого  $a = 6371$  км.

Первые два предположения делают возможным использовать для расчета метод геометрической оптики, считая, что радиоволна в атмосфере распространяется вдоль луча, оптическая длина которого подчиняется принципу Ферма [16]. Два других предположения соответствуют наиболее простой физической модели атмосферы, в которой отсутствуют горизонтальные градиенты показателя преломления.

Допустим, что атмосфера представляет собой совокупность тонких слоев, в пределах каждого

из которых можно считать показатель преломления одинаковым. Сферичность слоев требует корректировки второго закона Снеллиуса о преломлении света [16]. На рис. 2 выделен слой, лежащий между двумя радиусами  $OA = R$  и  $OB = R + \Delta R$ , на который под углом  $\theta$  с внутренней стороны падает луч. Допустим, что показатели преломления предшествующего и рассматриваемого слоев соответственно равны  $n(R)$  и  $n(R + \Delta R)$ .

Поскольку масштаб изменений показателя преломления значительно больше длины волны,

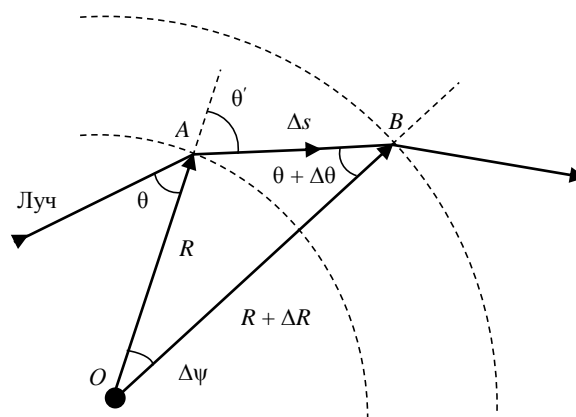


Рис. 2. Преломление луча в сферически-слоистой атмосфере

Fig. 2. Wave refraction in the spherically layered atmosphere

на границе слоев локально выполняется закон преломления Снеллиуса

$$n(R)\sin\theta = n(R + \Delta R)\sin\theta', \quad (7)$$

где  $\theta'$  – угол преломления в точке  $A$ . В соответствии с теоремой синусов для треугольника  $AOB$

$$\frac{\sin\theta'}{R + \Delta R} = \frac{\sin(\theta + \Delta\theta)}{R} = \frac{\sin\Delta\psi}{\Delta s}, \quad (8)$$

где  $\Delta s = AB$ . Из первой части этого уравнения следует, что  $R\sin\theta' = (R + \Delta R)\sin(\theta + \Delta\theta)$ . Тогда  $Rn(R)\sin\theta = (R + \Delta R)n(R + \Delta R)\sin(\theta + \Delta\theta)$ .

Следовательно, для сферически-слоистой среды

$$Rn(R)\sin\theta(R) = \text{const}, \quad (9)$$

где  $n(R)$  и  $\theta(R)$  – показатель преломления и угол падения для слоя с радиусом  $R$ . Выражение (9) является обобщением второго закона Снеллиуса. Сам закон Снеллиуса является следствием принципа Ферма, и его обобщение также соответствует этому принципу. Данное замечание имеет принципиальное значение для дальнейших вычислений.

Пусть источник сигнала (рис. 3) расположен в точке  $A$  на расстоянии  $R_0 = a + h$  от центра Земли  $O$ , точка приема  $B$  – на расстоянии  $R_1 = a + H$  и расстояние между источником и точкой приема вдоль поверхности Земли  $S = a\psi$ , где  $\psi$  – центральный угол, соответствующий горизонтальной дальности  $S$ , а  $h$  и  $H$  – высоты точек над поверхностью. Предположим, что угол, под которым излучается сигнал по отношению к нормали к поверхности, равен  $\theta_0$ . Тогда вдоль всего луча на основании (9) для любого значения  $R$  ( $R_0 \leq R \leq R_1$ ) будет выполняться следующее равенство:

$$Rn(R)\sin\theta(R) = R_0n(R_0)\sin\theta(R_0) = C. \quad (10)$$

При этом луч с таким значением постоянной  $C$  будет иметь наименьшую оптическую длину, поскольку он соответствует принципу Ферма. Это, однако, не гарантирует, что луч обязательно пройдет через точку расположения приемника  $B$ . Для того чтобы луч соединял точки  $A$  и  $B$ , необходимо найти нужный угол  $\theta_0 = \theta(R_0)$ . Поскольку значение этого угла на основании (10) однозначно определяет постоянную  $C$ , задача отыскания оптической длины луча  $L$  сводится к нахождению

такой постоянной  $C$ , которая соответствует единственному лучу, соединяющему точки  $A$  и  $B$ . Для того чтобы найти такое значение постоянной  $C$ , выведем уравнение, связывающее приращения центрального угла  $\Delta\psi$  и радиуса  $\Delta R$  (см. рис. 2).

Воспользуемся первой частью (8), которую перепишем в эквивалентном виде, учитывая, что  $\theta + \Delta\theta = \theta' - \Delta\psi$  и приращения всех величин, входящих в него, малы:

$$\sin\theta' - \Delta\psi\cos\theta' = \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)\sin\theta'.$$

Тогда, принимая во внимание (7), получим

$$\Delta\psi = \frac{\Delta R}{R} \frac{n(R)\sin\theta(R)}{\sqrt{n^2(R + \Delta R) - n^2(R)\sin^2\theta(R)}}. \quad (11)$$

При  $\Delta R \rightarrow 0$  получим

$$\psi = \int_{R_0}^{R_1} \frac{C dR}{R\sqrt{n^2(R)R^2 - C^2}}. \quad (12)$$

Поскольку центральный угол  $\psi$  задан, из (12) можно найти соответствующую постоянную  $C$ . Теперь можно определить длину оптического пути  $L$ . Для этого воспользуемся (8) и (11):

$$\Delta s = \frac{\Delta R}{R} \frac{(R + \Delta R)n(R + \Delta R)}{\sqrt{n^2(R + \Delta R) - n^2(R)\sin^2\theta(R)}}.$$

При  $\Delta R \rightarrow 0$ , учитывая, что  $dL = n(R)ds$ , получим

$$L = \int_{R_0}^{R_1} \frac{n^2(R)R dR}{\sqrt{n^2(R)R^2 - C^2}}. \quad (13)$$

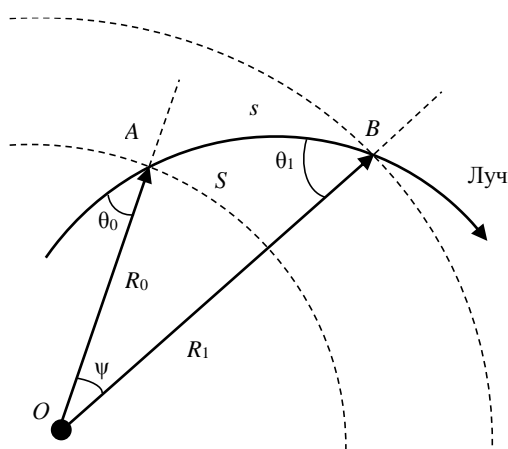


Рис. 3. Тропосферная рефракция  
Fig. 3. Tropospheric refraction

Уравнение (13) позволяет по известной постоянной  $C$  найти оптическую длину луча, вдоль которого распространяется электромагнитная волна из точки  $A$ , высота над поверхностью которой  $h = R_0 - a$ , в точку  $B$  с высотой  $H = R_1 - a$  при условии, что вдоль поверхности Земли точки разнесены на расстояние  $S = a\psi$ .

Разница  $\Delta r = L - D$ , где  $D$  – геометрическое расстояние между точками  $A$  и  $B$ , равное ошибке в определении дальности, возникающей вследствие рефракции радиоволн в атмосфере:

$$D = \sqrt{R_0^2 + R_1^2 - 2R_0R_1 \cos \psi}.$$

На рис. 4 приведены рассчитанные по изложенной методике графики зависимости ошибки  $\Delta r$  от расстояния  $D$  для МСЭ-модели стандартной атмосферы (6) при разных высотах источника  $H$ . Предполагается, что приемник находится на поверхности, т. е.  $h = 0$  км. Как видно на рис. 4, зависимости  $\Delta r = \Delta r(D)$  практически линейны:

$$\Delta r = L - D = \gamma D, \quad (14)$$

где  $\gamma$  ( $\gamma \ll 1$ ) – постоянный коэффициент, зависящий от высоты источника сигнала  $H$  и не зависящий от расстояния  $D$ .

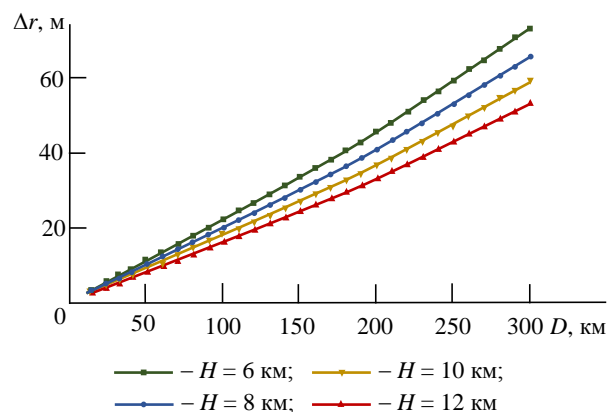


Рис. 4. Зависимости рефракционной ошибки  $\Delta r$  от расстояния  $D$  при разных высотах  $H$

Fig. 4. Plots of the refraction error  $\Delta r$  via the range  $D$  for different altitudes  $H$

Возникающая за счет рефракции ошибка  $\Delta r$  влияет на точность оценки МП ВС в WAM-системах. В таблице приведены результаты математического моделирования оценки МП ВС в WAM-системе, содержащей  $J=11$  приемных станций, полученные при отсутствии и в присутствии рефракции. Для оценки МП ВС использовался суммарно-разностный (СР) алгоритм, по-

дробный анализ которого был дан в [5, 6]. В частности, в этих статьях показано, что ошибка измерения псевдодальности для  $j$ -й приемной станции  $\delta \hat{R}_j = c(\delta \tau_j + \delta t_j)$ ,  $j=1, \dots, J$  пропорциональна сумме двух статистически независимых случайных компонент: ошибки измерения времени задержки  $\delta \tau_j$  и случайного ухода часов  $j$ -й приемной станции от системного времени  $\delta t_j$ . Поэтому суммарная ошибка измерения псевдодальности при моделировании может быть задана интегрально (без разделения на две указанные компоненты) и считается нормальной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратической ошибкой (СКО), равной 20 нс для всех приемных станций.

Смещение и СКО оценки МП ВС  
Bias and std of the aircraft position estimate

Координата	Рефракции нет, СР-алг.		Рефракция есть			
			СР-алг.		Мод. СР-алг.	
	$b$ , м	$\sigma$ , м	$b$ , м	$\sigma$ , м	$b$ , м	$\sigma$ , м
$x$	0	3.1	4.1	3.2	0	3.3
$y$	0	3.2	-8.6	3.3	0	4.0
$z$	0	9.6	-42.7	9.5	0.7	15.3

Из таблицы следует, что явление рефракции не вызывает изменения СКО оценок координат ВС  $\sigma$ , но приводит к смещению оценок  $b$ . При этом, если в горизонтальной плоскости значения смещения невелики (примерно 4...10 м), что вполне допустимо для WAM-систем, то в вертикальной плоскости смещение недопустимо велико – 43 м. Следовательно, необходимо синтезировать такой алгоритм оценивания, который позволяет компенсировать рефракционную ошибку.

**Синтез алгоритма оценивания местоположения воздушного судна.** Уравнение (14) позволяет предложить следующую систему уравнений для псевдодальностей, полученных при наблюдении ВС в WAM-системе:

$$(1 + \gamma) \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \beta = \hat{R}_j, \quad j=1, \dots, J, \quad (15)$$

где  $x, y, z$  – координаты радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  МП ВС;  $x_j, y_j, z_j$  – координаты радиуса-вектора  $\mathbf{p}_j$  МП  $j$ -й приемной станции;  $J$  – количество приемных станций;  $\beta = c \Delta T$  ( $\Delta T$  – неизвестная разность хода бортовых часов источника сигнала и

WAM-системы,  $c$  – скорость света);  $\hat{R}_j$  – измеренная псевдодальность.

Будем считать, что неизвестным в системе (15) является вектор  $\mathbf{V} = (x \ y \ z \ \beta \ \gamma)^T$ . Данный прием впервые был использован для компенсации рефракционной ошибки в [11]. Воспользуемся для нахождения оценок неизвестных параметров СР-алгоритмом, предложенным в [5, 6].

Вычтем и сложим уравнения с номерами  $j = 2, \dots, J$  с первым уравнением системы:

$$\begin{cases} (1+\gamma)[\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_j\|-\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_1\|] = \hat{R}_j - \hat{R}_1; \\ (1+\gamma)[\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_j\|+\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_1\|] = \hat{R}_j + \hat{R}_1 - 2\beta, j = 2, \dots, J, \end{cases}$$

где  $\|\cdot\|$  – длина вектора в трехмерном евклидовом пространстве.

После перемножения уравнений получим систему

$$\begin{aligned} (1+\gamma)^2 [\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_j\|^2 - \|\mathbf{r}-\mathbf{p}_1\|^2] = \\ = (\hat{R}_j - \hat{R}_1)(\hat{R}_j + \hat{R}_1 - 2\beta), j = 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (16)$$

Решим систему (16) в предположении  $\gamma = 0$ .

Учитывая, что  $\|\mathbf{r}-\mathbf{p}_j\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j) + \|\mathbf{p}_j\|^2$ ,  $j = 2, \dots, J$ , система (16) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_1, \mathbf{r}) - (\hat{R}_j - \hat{R}_1)\beta = \\ = \frac{1}{2}(\|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2) - \frac{1}{2}(\|\mathbf{p}_1\|^2 - \hat{R}_1^2); \\ j = 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (17)$$

Система уравнений (17) является линейной относительно вектора  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \beta \end{pmatrix}$ :

$$\mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T = (\mathbf{g}_2 | \dots | \mathbf{g}_J); \mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_1 \\ -(\hat{R}_j - \hat{R}_1) \end{pmatrix}; \\ \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle | \dots | \langle \mathbf{b}_J, \mathbf{b}_J \rangle - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle)^T; \end{aligned}$$

$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j \\ -\hat{R}_j \end{pmatrix}$ ;  $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle = \|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2$  – скалярные произведения Лоренца.

Решение системы (18)  $\mathbf{v} = \mathbf{G}^\# \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{G}^\#$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $\mathbf{G}$ . Полученное решение используем для формирования нулевого приближения

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = (\mathbf{v}_0^T \ 0)^T = (\mathbf{r}_0^T \ \beta_0 \ 0)^T = \\ = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ \beta_0 \ 0)^T \end{aligned}$$

для решения системы (15), которую будем решать итерационно, методом малого параметра. Для этого представим неизвестное решение в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{V} =$$

$$= (x_0 + \delta x \ y_0 + \delta y \ z_0 + \delta z \ \beta_0 + \delta \beta \ \delta \gamma)^T \quad (19)$$

и разложим систему (15) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{V}_0$ , ограничиваясь величинами первого порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} \left( \frac{x_0 - x_j}{R_{0j}} \quad \frac{y_0 - y_j}{R_{0j}} \quad \frac{z_0 - z_j}{R_{0j}} \quad 1 \quad R_{0j} \right) \delta \mathbf{V} = \\ = \hat{R}_j - R_{0j} - \beta_0; \\ j = 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $R_{0j} = \sqrt{(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2}$  – оценка истинной дальности. В матричной записи решение системы (20) примет вид

$$\delta \mathbf{V} = \mathbf{Q}^\# \Delta \hat{\mathbf{R}},$$

где  $\mathbf{Q} = \left( \frac{x_0 - x_j}{R_{0j}} \quad \frac{y_0 - y_j}{R_{0j}} \quad \frac{z_0 - z_j}{R_{0j}} \quad 1 \quad R_{0j} \right)_{j=1}^J$  –

матрица размера  $J \times 5$ ;  $\mathbf{Q}^\#$  – псевдообратная матрица;  $\Delta \hat{\mathbf{R}} = (\hat{R}_j - R_{0j} - \beta_0)_{j=1}^J$ . Окончательное решение имеет вид (19).

В таблице приведены результаты моделирования синтезированного алгоритма, получившего название модифицированного СР-алгоритма, при тех же сценарных условиях, что были приняты ранее. Как следует из таблицы, использование предлагаемого алгоритма позволило практически полностью ликвидировать смещение оценок: даже в вертикальной плоскости оно получилось меньшим 1 м.



Увеличение СКО оценки высоты, которое составило 60 %, является платой за введение новой переменной  $\gamma$  в состав вектора неизвестных системы (15). Отметим, что полученное значение СКО оценки высоты осталось в допустимых для WAM-системы пределах.

**Заключение.** Неоднородность тропосферы как среды распространения сигналов широкозонных мультилатерационных систем навигации (WAM-систем) приводит к смещению оценок местоположения воздушных судов. Особенно большие значения смещений получаются в вертикальной плоскости. Это делает задачу синтеза алгоритма оценивания местоположения с компенсацией возникающих вследствие рефракции радиоволн в тропосфере ошибок чрезвычайно актуальной.

В статье показано, что рефракционная ошибка при измерении дальности до воздушного судна линейно зависит от его дальности. На основании этой модели в статье синтезирован модифицированный суммарно-разностный алгоритм оценки координат воздушных судов. Модификация заключается во введении и последующей оценке дополнительного неизвестного параметра, который характеризует увеличение оптического пути радиосигнала в тропосфере по сравнению со свободным пространством. Алгоритм позволяет ликвидировать возникающее из-за рефракции смещение оценок координат ценой небольшого увеличения СКО оценки высоты вследствие увеличения количества неизвестных системы уравнений, решением которой является вектор координат воздушного судна.

### Список литературы

1. Multilateration (MLAT) Concept of Use. Edition 1, ICAO Asia and Pacific Office, Sep. 2007. URL: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (дата обращения 30.11.18)
2. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration // Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2009. Vol. 1, iss. 3. P. 223–229. doi: 10.1017/s1759078709000245
3. Efficient location strategy for airport surveillance using mode-s multilateration systems / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, J. V. Balbastre-Tejedor, E. D. L. Reyes // Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2012. Vol. 4, iss. 2. P. 209–216. doi: 10.1017/s1759078712000104
4. Localization algorithms for multilateration (MLAT) systems in airport surface surveillance / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, J. V. Balbastre-Tejedor // Signal, Image and Video Processing. 2015. Vol. 9, iss. 7. P. 1549–1558. doi: 10.1007/s11760-013-0608-1
5. Монаков А. А. Алгоритм оценки координат объектов для систем мультилатерации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 4. С. 38–46. doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-38-46
6. Монаков А. А. Комбинированный алгоритм оценки координат в многопозиционной дальномерной навигационной системе // XXV Междунар. науч. конф. "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж, 2019. Т. 4. С. 8–16.
7. Schüler T. The TropGrid2 standard tropospheric correction model // GPS Solut. 2014. Vol. 18, iss. 1. P. 123–131. doi: 10.1007/s10291-013-0316-x
8. Juni I., Rózsa S. Validation of a New Model for the Estimation of Residual Tropospheric Delay Error Under Extreme Weather Conditions // Periodica Polytechnica Civil Engineering. 2019. Vol. 63, № 1. P. 121–129. doi: 10.3311/PPci.12132
9. Corrections of stratified tropospheric delays in SAR interferometry: Validation with global atmospheric models / M.-P. Doin, C. Lasserre, G. Peltzer, O. Cavalié, C. Doubre // J. of Applied Geophysics. 2009. Vol. 69, № 1. P. 35–50. doi: 10.1016/j.jappgeo.2009.03.010
10. Yu Z., Li Z., Wang S. An Imaging Compensation Algorithm for Correcting the Impact of Tropospheric Delay on Spaceborne High-Resolution SAR // IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. 2015. Vol. 53, № 9. P. 4825–4836. doi: 10.1109/TGRS.2015.2411261
11. De Miguel G., Portas J. B., Herrero J. G. Correction of propagation errors in Wide Area Multilateration systems // European Radar Conf. (EuRAD), Rome, Italy, 2009. P. 81–84.
12. Abbud J. M., De Miguel G., Portas J. B. Correction of systematic errors in Wide Area Multilateration // Tyrrhenian Intern. Workshop on Digital Communications – Enhanced Surveillance of Aircraft and Vehicles, Capri, Italy, 2011. P. 173–178.
13. Abbud J., De Miguel G. Joint Target Tracking and Systematic Error Correction for Wide Area Multilateration // Electronic Navigation Research Institute (eds) Air Traffic Management and Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Tokyo, Japan, 2014. Vol. 290. P. 175–191. doi: 10.1007/978-4-431-54475-3\_10
14. Manual of the ICAO standard atmosphere, Doc 7488/3, 1993. P. 305. URL: [http://files.fip.rshu.ru/Новый\\_каталог/2/doc/Руководство%20по%20стандартной%20атмосфере%20ICAO\\_Doc7488.pdf](http://files.fip.rshu.ru/Новый_каталог/2/doc/Руководство%20по%20стандартной%20атмосфере%20ICAO_Doc7488.pdf) (дата обращения 24.07.2014)
15. Рекомендация МСЭ-R P. 453-10 "Индекс рефракции радиоволн: его формула и данные о рефракции", Женева. 2012. № 2. P. 30. URL: [https://www.itu.int/dms\\_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.453-10-201202-S!!PDF-R.pdf](https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.453-10-201202-S!!PDF-R.pdf) (дата обращения 11.06.2019)
16. Черный Ф. Б. Распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1972. 464 с.

## Информация об авторах

**Монаков Андрей Алексеевич** – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – цифровая обработка сигналов; радиолокация; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением. Адрес: Институт радиотехники, электроники и связи, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67а, Санкт-Петербург, 190000, Россия  
E-mail: a\_monakov@mail.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

**Миролюбов Александр Маркович** – кандидат технических наук (2004), главный конструктор КСА УВД, ЗАО "Азимут-Альянс". Автор более 15 научных работ. Сфера научных интересов – управление воздушным движением, обработка информации наблюдения, процедуры, основанные на плановых траекториях ВС. Адрес: Закрытое акционерное общество "Азимут-Альянс", Пискаревский пр., д. 2, к. 3, лит. А, пом. 727 Санкт-Петербург, 195027, Россия  
E-mail: al\_mirol@inbox.ru

---

## References

1. Multilateration (MLAT) Concept of Use. Edition 1, ICAO Asia and Pacific Office, Sep. 2007. Available at: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (accessed 30.11.18)
2. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration. Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2009, vol. 1, iss. 3, pp. 223–229. doi: 10.1017/s1759078709000245
3. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Galati G., Balbastre-Tejedor J. V., Reyes E. D. L. Efficient location strategy for airport surveillance using mode-s multilateration systems. Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2012, vol. 4, iss. 2, pp. 209–216. doi: 10.1017/s1759078712000104
4. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Galati G., Balbastre-Tejedor J. V. Localization algorithms for multilateration (MLAT) systems in airport surface surveillance. Signal, Image and Video Processing. 2015, vol. 9, iss. 7, pp. 1549–1558. doi: 10.1007/s11760-013-0608-1
5. Monakov A. A. Localization Algorithm for Multilateration Systems. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 4, pp. 33–41. doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-38-46 (In Russ.)
6. Monakov A. A. Combined positioning algorithm for a multipositional range-based navigation system. // XXV Intern. Scientific Conf. "Radiolocation, Navigation and Communication", Voronezh. 2019, vol. 4, pp. 8–16. (In Russ.)
7. Schüler T. The TropGrid2 standard tropospheric correction model. GPS Solut. 2014, vol. 18, iss. 1, pp. 123–131. doi: 10.1007/s10291-013-0316-x
8. Juni I., Rózsa S. Validation of a New Model for the Estimation of Residual Tropospheric Delay Error Under Extreme Weather Conditions. Periodica Polytechnica Civil Engineering. 2019, vol. 63, no. 1, pp. 121–129. doi: 10.3311/PPci.12132
9. Doin M.-P., Lasserre C., Peltzer G., Cavalié O., Doubré C. Corrections of stratified tropospheric delays in SAR interferometry: Validation with global atmospheric models. J. of Applied Geophysics. 2009, vol. 69, no. 1, pp. 35–50. doi: 10.1016/j.jappgeo.2009.03.010
10. Yu Z., Li Z., Wang S. An Imaging Compensation Algorithm for Correcting the Impact of Tropospheric Delay on Spaceborne High-Resolution SAR. IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. 2015, vol. 53, no. 9, pp. 4825–4836. doi: 10.1109/TGRS.2015.2411261
11. De Miguel G., Portas J. B., Herrero J. G. Correction of propagation errors in Wide Area Multilateration systems. European Radar Conf. (EuRAD), Rome, Italy, 2009, pp. 81–84.
12. Abbud J. M., De Miguel G., Portas J. B. Correction of systematic errors in Wide Area Multilateration. Tyrrhenian Intern. Workshop on Digital Communications – Enhanced Surveillance of Aircraft and Vehicles, Capri, Italy, 2011, pp. 173–178.
13. Abbud J., De Miguel G. Joint Target Tracking and Systematic Error Correction for Wide Area Multilateration. Electronic Navigation Research Institute (eds) Air Traffic Management and Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Tokyo, Japan, 2014, vol. 290, pp. 175–191. doi: 10.1007/978-4-431-54475-3\_10
14. Manual of the ICAO standard atmosphere, Doc 7488/3, 1993. P. 305. URL: [http://files.fip.rshu.ru/Новый%20каталог/2/doc/Руководство%20по%20стандартной%20атмосфере%20ICAO\\_Doc7488.pdf](http://files.fip.rshu.ru/Новый%20каталог/2/doc/Руководство%20по%20стандартной%20атмосфере%20ICAO_Doc7488.pdf) (дата обращения 24.07.2014)
15. Recommendation ITU-R P.453-10, "The radio refractive index: its formula and refractivity data", Geneva, February 2012, 30 p. Available at: [https://www.itu.int/dms\\_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.453-10-201202-S!!PDF-R.pdf](https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.453-10-201202-S!!PDF-R.pdf) (accessed 11.06.2019) (In Russ.)
16. Chernyi F. B. Radiowave propagation. *M.: Sov. Radio*, 1972, 464 p. (In Russ.)

### Information about the authors

**Andrey A. Monakov**, Dr. Sci. (Eng.) (2000), Professor (2005) of the Department of radio equipment systems of the Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Honorable Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honorable Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: digital signal processing; radar theory; microwave remote sensing; air traffic control.

Address: Institute of Radio Engineering, Electronics and Communications, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67A Bolshaja Morskaja St., St Petersburg 190000, Russia

E-mail: [a\\_monakov@mail.ru](mailto:a_monakov@mail.ru)

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

**Aleksandr M. Mirolubov**, Cand. Sci. (Eng.) (2004), Chief designer of ATM System, JSC "Azimut–Alliance". The author of more than 15 scientific publications. Area of expertise: air traffic control, surveillance data processing, trajectory based operations.

Address: JSC "Azimut-Alliance", 2/3 A Piskarevsky Pr., off. 727, St Petersburg 195027, Russia

E-mail: [al\\_mirol@inbox.ru](mailto:al_mirol@inbox.ru)

---