Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2019. Т. 22, № 4. С. 6–17
Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2019, vol. 22, no. 4, pp. 6–17

Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов
Radio electronic facilities for signal transmission, reception and processing

УДК 621.396.9 https://doi.org/10.32603/1993-8985-2019-22-4-6-17

Ретроспективный обзор троичных последовательностей с идеальной периодической автокорреляцией и устройств их генерации

Е. И. Кренгель✉

АО "СБТ"
ул. Генерала Алексеева, д. 16, Москва, 124460, Россия

✉ *evg.krengel@gmail.com*

Аннотация

Введение. Идеальные многофазные унимодулярные последовательности, т. е. последовательности с идеальной периодической автокорреляцией и единичной амплитудой символов, широко используются в современной радиосвязи и радиолокации. Особое место среди них занимают идеальные троичные последовательности (ИТП) с элементами {–1, 0, 1}. ИТП достаточно многочисленны, а их длина в отличие от идеальных двоичных последовательностей не ограничена сверху. Известен обзор ИТП, сделанный Фаном и Дарнеллом в 1996 г. Однако за прошедшие два десятилетия были открыты новые многочисленные семейства ИТП, установлены связи между ИТП и циркулянтными взвешенными матрицами, получены теоремы о существовании ИТП с определенными параметрами. Поэтому возникла потребность в новом современном обзоре известных на сегодня ИТП.

Цель работы. Обзор современных ИТП предназначен для разработчиков радиоэлектронных систем, в которых используются идеальные последовательности.

Материалы и методы. Рассмотрены и проанализированы отечественные и зарубежные источники информации (книги, журнальные статьи, труды конференций, патенты). Поиск осуществлялся в сети Интернете по ключевым словам с использованием Интернет-ресурсов Yandex и Google, а также в цифровых электронных библиотеках (Российской Государственной библиотеке (РГБ), IEEE Xplore Digital Library), в материалах конференций (Цифровая Обработка Сигналов и ее Применение (DSPA), Sequences and Their Applications (SETA), и др.).

Результаты. Наряду с решением информационно-библиографической задачи в обзоре показана взаимосвязь полученных в разное время ИТП, их эквивалентность циркулянтным взвешенным матрицам, а также рассмотрены устройства генерации известных семейств ИТП (Ипатова, Хохолдта-Джастесена и др.).

Заключение. Представлен ретроспективный обзор ИТП; рассмотрены генераторы известных семейств ИТП. Результаты исследования актуальны для применения в современных системах радиосвязи и радиолокации, в частности в CW- и LPI-радарах.

Ключевые слова: радиосигналы, идеальные троичные последовательности, генераторы последовательностей

Для цитирования: Кренгель Е. И. Ретроспективный обзор троичных последовательностей с идеальной периодической автокорреляцией и устройств их генерации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2019. Т. 22, № 4. С. 6–17. doi: 10.32603/1993-8985-2019-22-4-6-17

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 24.06.2019; принята к публикации после рецензирования 03.07.2019; опубликована онлайн 27.09.2019

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2019. Т. 22, № 4
Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2019, vol. 22, no. 4

REVIEW ARTICLE

Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов
Radio electronic facilities for signal transmission, reception and processing

Retrospective Review of Perfect Ternary Sequences and Their Generators

Evgeny I. Krengel✉
JSC "NWT"
16, Generala Alekseeva Str., 124460, Moscow, Russia

✉ *evg.krengel@gmail.com*

Abstract

Introduction. Perfect polyphase unimodular sequences, i.e. sequences with ideal periodic autocorrelation and single amplitude of symbols are widely used in modern radio communications and radars. Among them a special place is occupied by perfect ternary sequences (PTSs) with elements {–1, 0, 1}. PTSs are quite numerous and their length in comparison with perfect binary sequences is not limited from above. There is a well-known review of PTS families undertaken by Fan and Darnell in 1996. However, over the past two decades numerous new PTS families have been discovered. Connections between PTSs and circulant weighing matrices have been established and certain theorems on the existence of PTS existence for certain lengths have also been obtained. Therefore, there is a need for a new modern review of existing PTSs.

Objective. This review of existing PTSs is intended for developers of radio electronic systems using perfect sequences.

Materials and methods. Domestic and foreign sources of information (books, journal papers, conference proceedings, patents) were considered and analysed. A Web search was carried out based on keywords using resources of Yandex and Google, as well as in digital electronic libraries (Russian State Library (RSL), IEEE Xplore Digital Library), conference materials (Digital Signal Processing and its Application (DSPA), Sequences and their Applications (SETA), etc.).

Results. In addition to the matter of collating an informational bibliography, the review shows the relationship be-tween PTSs obtained at different times and their connection with circulant weighing matrices. The review also de-scribes the generators of known PTS families (Ipatov, Hoholdt-Justensen, etc.).

Conclusion. A retrospective review of PTSs is herein presented and the generators of certain known PTS families have been considered. The results of the study are relevant for use in modern radio communications and radar systems and in CW and LPI radars in particular.

Key words: radio signals, perfect ternary sequences, sequence generators

For citation: Krengel E. I. Retrospective Review of Perfect Ternary Sequences and their Generators. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2019, vol. 22, no. 4, pp. 6–17. doi: 10.32603/1993-8985-2019-22-4-6-17

Conflict of interest. The author declares no conflict of interest.

Submitted 24.06.2019; accepted 03.07.2019; published online 27.09.2019

Введение. Идеальные многофазные унимодулярные последовательности, т. е. последовательности с идеальной периодической автокорреляцией и единичной амплитудой символов, широко используются в современной радиосвязи и радиолокации [1–4]. В радиолокации наиболее перспективным видится их применение в радарах с непрерывным излучением (CW-радары) [3] и низкой вероятностью перехвата (LPI-радары) [4]. Наибольшую известность среди многофазных последовательностей получили идеальные многофазные последовательности Франка (Frank), Задова–Чу (Zadoff–Chu), Милевского (Milewski) и их модификации [2, 3]. Общим свойством всех этих последовательностей является увеличение объема алфавита с ростом их длины.

В то же время имеются многочисленные семейства идеальных многофазных последовательностей с нулями, объем алфавита которых не зависит от их длины. Цена, которую мы вынуждены платить за это, – пик-фактор больше 1 и, соответственно, энергетические потери в приемнике. К таким последовательностям с нулями относятся хорошо известные троичные последовательности [1, 2], 4-фазные обобщенные последовательности Ли длины $\left(p^m+1\right)$, где $p>2$, простое; $m\ge 1$, целое, причем $\left(p^m+1\right)\equiv 2 \bmod 4$ [5]; 8-фазные последовательности Люке длины $\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right) \equiv \equiv 4 \bmod 8$, где $p>2$, простое; $n \geq 2$; $m \geq 1$; n, m – целые, причем $m|n$ (запись $m|n$ означает, что m является делителем n) [6]; 4-фазные последовательности Шоттена–Люке длины $\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right)$, где $p=4t+1>1$, простое; $n>1$, m – целые, причем $m|n$ и $n \neq 2m$ [7]; а также 4- и 8-фазные последовательности длины $N=2\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right)$, где $p>2$, простое; $n=mk$; $m \geq 1$; $k>1$, целые, причем $4\left|\left(p^m-1\right)\right.$ [8] и др.

Особое место среди них занимает класс идеальных троичных последовательностей (ИТП) с элементами $\{-1,\ 0,\ 1\}$. Фактически это двоичные последовательности с алфавитом $\{-1,\ 1\}$, но с нулевыми символами на некоторых позициях. Однако имеются существенные отличия. Во-первых, их длина не ограничена сверху, как у идеальных двоичных последовательностей. Во-вторых, эти последовательности достаточно многочисленны, причем их пик-фактор стремится к единице с ростом длины. В-третьих, генераторы ИТП в отличие от генераторов других идеальных многофазных последовательностей с объемом алфавита больше трех аппаратно проще. И наконец, в режиме непрерывной передачи ИТП могут компенсировать отсутствие идеальных бинарных последовательностей. С этой целью Леванон и Фридман предложили заместить нули в периодически передаваемой ИТП через период единицами и минус единицами [9]. При этом в качестве опорной последовательности в корреляторе применяется исходная ИТП, а время интегрирования в нем выбирается равным четному числу периодов последовательности. В этом случае пик-фактор передаваемого сигнала становится равным единице, значения боковых лепестков на выходе коррелятора равны нулю. В результате платой за несогласованную фильтрацию будут энергетические потери в приемнике, но и эти потери стремятся к нулю с ростом длины ИТП.

Конструированию ИТП и исследованию их свойств посвящено большое число научных статей и книг. Широкую известность получили монография Ипатова [1] о периодических дискретных сигналах с оптимальными корреляционными свойствами (1991) и справочник Фана и Дарнелла [2] по проектированию последовательностей для приложений связи (1996), в которых рассмотрены известные на то время семейства ИТП. За прошедшие с тех пор годы были открыты новые многочисленные семейства ИТП, доказаны теоремы об их существовании, установлены связи между ними и идеальными троичными циркулянтными взвешенными матрицами (circulant weighing matrices) $CW(N,\ K)$ порядка N (совпадающего с длиной последовательности) и веса K.

С учетом вышеизложенного и возросшего за последние годы интереса к ИТП в настоящей статье дан ретроспективный обзор ИТП за их почти 60-летнюю историю и рассмотрены некоторые конструкции генераторов этих последовательностей.

Идеальные троичные последовательности (краткий обзор). История ИТП насчитывает около 60 лет. В 1960 г. Томпкинс, используя метод исчерпывающего поиска, генерировал ИТП вплоть до длины 18 [5], [10]. Затем в 1967 г. Чанг [10] на основе m-последовательностей над $\mathrm{GF}(3)$ построил ИТП с длиной $N=\left(3^n-1\right)/2$ (N нечетно). Отметим, что подобный метод построения ИТП также предложили Грин и Келсч [11]. В 1977 г. Мохарир [12] нашел необходимые условия существования ИТП и, используя циклические разностные множества, получил несколько новых ИТП. В 1979 г. Шедд и Сарват на основе свойств корреляционной идентичности двух последовательностей (Сарват и Персли [13]), применимых к парам m-последовательностей с трехуровневой взаимной корреляцией (Голд [14], Нихо [15], Касами [16], Хеллесет [17]), построили семейство ИТП длины p^n-1 ($p \geq 2$ – простое число) [18].

Затем с интервалом в несколько лет были найдены две систематические конструкции ИТП длины $\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right)$, где p – простое число; $n=mk$; $m>1$ – целое, причем $k>3$ – нечетно. Первая конструкция для $p>2$ была получена Ипатовым в 1979 г. на основе p^m-ичных m-последовательностей [19]. Вторая конструкция для $p=2$ получена Хохолдтом и Джастесеном в 1983 г. на основе разностных множеств Зингера [20].

Впоследствии Ипатов, Платонов, Самойлов [21] и Камалетдинов [22] нашли другие ИТП с такими же параметрами (длиной и пик-фактором), как ИТП [19]. В дальнейшем было установлено, что ИТП Чанга и Грина–Келсча [10, 11] являются подмножеством ИТП Ипатова для $p = 3$, ИТП Хохолдта–Джастесена [20] совпадают с ИТП Шедда–Сарвата [18] для $p = 2$, $m = 1$ и нечетного *n*, а ИТП Махарира [12] принадлежат семейству ИТП Ипатова или Хохолдта и Джастесена. Более подробные сведения об этом можно найти в [2].

В последующие годы с открытием новых идеальных бинарных последовательностей с двухуровневой автокорреляцией (последовательностей GMW, последовательностей степенных функций Касами, последовательностей Велча–Гонг и гиперовальных последовательностей Машиетти [23]) появился ряд работ, посвященных исследованию их взаимно-корреляционных свойств. В связи с этим необходимо упомянуть работы [24–31], благодаря которым найдены различные пары двоичных и недвоичных последовательностей с трехуровневой взаимной корреляцией, удовлетворяющие условиям конструкции Шедда–Сарвата. В результате этого стало возможным построение большего числа ИТП [30].

В 1986 г. Геймс [32], используя аппарат разностных множеств и квадрик в проективной геометрии, построил семейство троичных последовательностей длины $\left(q^n - 1\right)/\left(q - 1\right)$, где q – степень простого числа. Геймс доказал, что ИТП Хохолдта–Джастесена являются подмножеством полученной им конструкции. В 1992 г. Джексон и Вильд [33] показали, что ИТП Ипатова также являются подмножеством ИТП Геймса. Однако оставался открытым вопрос, можно ли на основе предложенной Геймсом конструкции генерировать ИТП для четных *n*. Эта проблема, известная как проблема Waterloo, была разрешена Арасу, Диллоном, Джангникелем и Поттом в 1995 г. с помощью относительных разностных множеств и весовых матриц [34, 35]. В результате стало очевидным, что с помощью предложенной Геймсом конструкции можно строить ИТП только для нечетных *n*.

С тех пор ИТП Ипатова переоткрывались еще не единожды. Так, Ли [5] показал, что эти ИТП представляют собой подмножество идеальных *q*-ичных последовательностей, найденных с помощью мультипликативных характеров над полем $\mathrm{GF}(p)$. Затем в 1996 г. Люке и Шоттен [7] получили те же самые ИТП из *w*-циклически идеальных последовательностей. ИТП Ипатова при $q = 3$ оказались также подмножеством идеальных многофазных последовательностей с нулями, построенных Бозтасом и Парампалли [36].

Параллельно с ИТП изучались также идеальные троичные массивы (perfect ternary array – PTA) и, в частности, циркулянтные взвешенные матрицы $CW(N, K)$ порядка N и веса K с элементами из множества $\{-1, 0, 1\}$. Изучение $CW(N, K)$ представляется особенно важным, так как существует взаимно-однозначное соответствие между ними и ИТП длины N с K ненулевыми элементами. Подробные обзоры PTA и матриц $CW(N, K)$ содержатся в работах Араса и Диллона [37, 38]. В 1990 г. Антвейлер и Люке предложили новый метод построения PTA и ИТП [39]. Для этого они использовали кронекеровские произведения известных ИТП и PTA с идеальной апериодической автокорреляцией. С помощью этого метода и компьютерного поиска они получили новую ИТП длины 33 с энергической эффективностью 0.76.

В настоящее время доказан целый ряд теорем существования и несуществования $CW(N, K)$ с заданными параметрами N и K [37, 38]. С помощью этих теорем и компьютерного поиска были найдены $CW(24, 9)$, $CW(71, 25)$, $CW(87, 49)$, $CW(96, 36)$ и $CW(142, 100)$.

Несомненный интерес представляют комбинированные ИТП, образованные посимвольным произведением двух ИТП с взаимно простыми периодами или произведением идеальной двоичной последовательности 111–1 длины 4 и любой ИТП нечетной длины [1, 2]. В этой связи следует упомянуть метод построения ИТП длины 4*N*, предложенный Кренгелем в 2007 г. [40]. Согласно этому методу новые ИТП длины 4*N* образуются в результате смешивания идеальной троичной последовательности и троичной последовательности с нечетно идеальной автокорреляцией, имеющих нечетную длину *N* и одинаковое число нулей.

Наконец, последняя по времени в этом списке конструкция ИТП нечетной длины $N = N_1 N_2$ построена Кренгелем в 2017 г. [41, 42]. Новые ИТП образуются на основе последовательностей сдвига длины N_1, соответствующих m-последовательностям длины p^n-1 над $\mathrm{GF}(p)$, и ИТП нечетной длины N_2, где $p>2$ – простое число; $n=mk$, $m\ge 1$ – целое, $k\ge 3$ – нечетно; $N_1=\left(p^{mk}-1\right)/\left(p^m-1\right)$ и $2N_2\left|\left(p^m-1\right)\right.$. Заметим, что число формируемых этим методом ИТП существенно увеличивается, если использовать расширенные последовательности сдвига, получаемые на основе разностных балансных функций со свойствами *d*-форм [43, 44].

Генераторы идеальных троичных последовательностей. В [1] достаточно подробно описаны устройства, генерирующие ИТП Ипатова длины $\left(p^{mk}-1\right)/\left(p^m-1\right)$, $p\ge 3$, простое и Хохолдта–Джастесена длины $\left(2^{mk}-1\right)/\left(2^m-1\right)$ при $m\ge 1$ и нечетном $k\ge 3$. Причем в [1] ИТП Хохолдта–Джастесена представлены с помощью использования следовых функций и преобразований над ними, что существенно упрощает их аппаратную реализацию.

ИТП Ипатова $\mathbf{g}=\{g_i\}$ длины $N=\dfrac{p^{mk}-1}{p^m-1}$ строится в соответствии с выражением

$$g_i=(-1)^i\,\psi\left[\mathrm{Tr}_m^n\left(\alpha^i\right)\right],\ \ 0\le i<N,$$

где $\psi[\cdot]$ – двузначный мультипликативный характер поля $\mathrm{GF}\left(p^m\right)$;

$$\mathrm{Tr}_m^n(x)=\sum_{i=0}^{n/m-1}x^{p^{im}}$$

– след элемента x из поля Галуа $\mathrm{GF}\left(p^n\right)$ относительно поля $\mathrm{GF}\left(p^m\right)$; $n=mk$; α – примитивный элемент поля $\mathrm{GF}\left(p^n\right)$, причем $m\ge 1$; $k\ge 3$ – нечетно. Напомним, что двузначным мультипликативным характером поля $\mathrm{GF}(q)$ является отображение мультипликативной группы $\mathrm{GF}^*(q)$ основного поля (т. е. всех $q-1$ ненулевых элементов поля) на множество $\{-1,\ 1\}$ вида $\psi(\delta)=(-1)^{\log_\beta\delta}$, где $\delta\in\mathrm{GF}(q)$; $\log_\beta\delta$ – логарифм δ по основанию β (β – примитивный элемент поля $\mathrm{GF}(q)$). Очевидно, что $\log_\beta\delta$ принимает одно из значений 0, 1, 2, …, $q-2$. Для ИТП Ипатова $q=p^m$ и мультипликативный характер для нулевого элемента поля $\delta=0$ доопределен до нуля.

Генератор ИТП Ипатова, блок-схема которого представлена на рис. 1, состоит из последовательно соединенных генератора 1 *q*-ичной m-последовательности длины q^k-1, $q=p^m$, $m\ge 1$, $k\ge 3$ – нечетное; блока преобразователя 2, выполняющего операцию преобразования входного ненулевого символа (ненулевого элемента поля $\mathrm{GF}(q)$) в символ двузначного мультипликативного характера, имеющего значение –1 или 1, а нулевого символа (нулевого элемента поля $\mathrm{GF}(q)$) – в ноль. Выход преобразователя подключен к первому входу умножителя 3, второй вход которого подключен к выходу генератора меандра 4.

Принцип работы и блок-схема генератора *q*-ичной m-последовательности длины q^k-1 подробно описаны в литературе, в частности в книгах Ипатова [1], Фана и Дарнелла [2] и Голомба и Гонг [23]. Преобразователь, в котором вычисляется двузначный мультипликативный характер элемента поля Галуа, можно реализовать с помощью различных устройств. В частности, для этой цели может быть использовано устройство непосредственного вычисления двузначного мультипликативного характера любого ненулевого элемента поля $\mathrm{GF}(q)$ [45]. Однако такая реализация требует значительных аппаратных и временны́х ресурсов. С другой стороны, конструкция преоб-

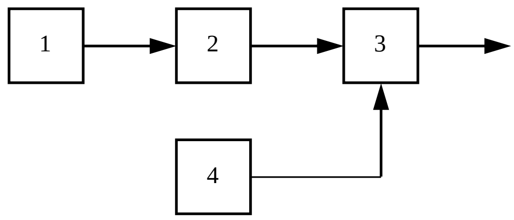

Рис. 1. Блок-схема генератора ИТП Ипатова

Fig. 1. Block diagram of Ipatov PTS generator:
1 – *q*-ary *m*-sequence generator; 2 – converter; 3 – multiplier; 4 – meander generator

разователя может быть существенно упрощена при использовании заранее вычисленной таблицы отображения ненулевых p^m элементов x_j в один из символов $\{-1,\ 0,\ 1\}$, реализованной на постоянном запоминающем устройстве (ПЗУ), как это предложено в [1].

ИТП Хохолдта–Джастесена $\mathbf{a}=\{a_i\}$ длины $N=\left(2^n-1\right)/\left(2^m-1\right),\ \ n=mk,\ \ m\geq 1,\ \ k\geq 3$ – нечетное, в предложенной Ипатовым интерпретации [1] имеет вид

$$a_i=\begin{cases}0, & \mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)=0;\\ e\left[d_i\left(\mathrm{Tr}_m^n\,\xi^i\right)^{q-3}\right], & \mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)\neq 0,\end{cases}$$

где $e(\delta)=(-1)^{\mathrm{Tr}_1^m(\lambda\delta)}$ – аддитивный характер поля $\mathrm{GF}(q)$ $\left(\lambda,\,\delta\in\mathrm{GF}(q)\right)$; $0\leq i<N,\ \ q=2^m$,

$$d_i=\begin{cases}\sum\limits_{t=1}^{(k-1)/4}\mathrm{Tr}_m^n\left\{\xi^{\left[q^{(8t-1)s}+1\right]i}\right\}, & k\equiv 1\bmod 4;\\ \sum\limits_{t=1}^{(k-3)/4}\mathrm{Tr}_m^n\left\{\xi^{\left[q^{(8t+1)s}+1\right]i}\right\}, & k\equiv 1\bmod 4;\end{cases}$$

ξ – примитивный элемент $\mathrm{GF}\left(q^k\right)$; s – некоторое целое число, причем $(s,\ k)=1$, что является записью того, что наибольший общий делитель чисел s и k равен единице.

Генератор ИТП Хохолдта–Джастесена, реализованный в соответствии с представленными выражениями, блок-схема которого показана на рис. 2, состоит из двух генераторов линейных последовательностей: 1 – формирующего m-последовательность вида $\left\{\mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)\right\}$, 2 – формирующего последовательность $\{d_i\}$, а также преобразователя 3, который в случае $\left\{\mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)\right\}\neq 0$ возводит элемент $\mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)$ в степень $q-3$, умножает на сформированный в генераторе 2 элемент d_i, а затем вычисляет аддитивный характер полученного произведения. В противном случае на выходе преобразователя 3 формируется символ нуля. С целью упрощения схемы преобразователь 3 предложено реализовать на ПЗУ [1].

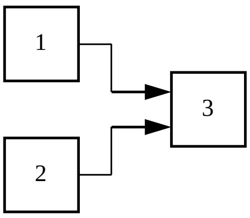

Рис. 2. Блок-схема генератора ИТП Хохолдта–Джастесена

Fig. 2. Block diagram of Hoholdt–Justesen PTS generator: 1 – generator of the *m*-sequence $\left\{\mathrm{Tr}_m^n\left(\xi^i\right)\right\}$; 2 – generator of the sequence $\{d_i\}$; 3 – converter

Рассмотрим теперь генерацию ИТП [41], частным случаем которых являются ИТП Ипатова. В [42] описан генератор ИТП нечетной длины N_1N_2, где $N_1=\dfrac{p^{mk}-1}{p^m-1}$; $N_2=\dfrac{p^m-1}{2h}$ – длина некоторой известной ИТП нечетной длины, причем $p>2$ – простое число; $n=mk$; $m\geq 1$, $h\geq 1$ – целые; $k\geq 3$ – нечетно. Метод построения этих ИТП подробно описан в [41].

Пусть $\mathbf{d}=\{d_i\}$ есть p-ичная m-последовательность длины p^n-1 с элементами

$$d_i=\mathrm{Tr}_1^n\left(\alpha^i\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^{ip^j},\ \ n=mk,\ \ 0\leq i<p^n-1$$

и $\mathbf{b}=\{b_i\}$ есть q-ичная m-последовательность длины p^n-1, $q=p^m$ с элементами

$$b_i=\mathrm{Tr}_m^n\left(\alpha^i\right)=\sum_{j=0}^{n/m-1}\alpha^{ip^{mj}},\ \ n=mk,\ \ 0\leq i<p^n-1,$$

где α – примитивный элемент поля $\mathrm{GF}\left(p^n\right)$.

Рассмотрим матрицу декомпозиции последовательности $\mathbf{d}$, состоящую из $T=\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right)$ строк и p^m-1 столбцов. Строками этой матрицы являются последовательности из всех нулей или циклические сдвиги некоторой короткой p-ичной m-последовательности длины p^m-1. Значения этих сдвигов определяются последовательностью сдвигов $\mathbf{e}$ [23, 24], определенной выражением

$$\mathbf{e}=\{e_i\}=\begin{cases}\infty, & \mathrm{Tr}_m^n\left(\alpha^i\right)=0,\\ \log_\beta\left[\mathrm{Tr}_m^n\left(\alpha^i\right)\right], & \mathrm{Tr}_m^n\left(\alpha^i\right)\neq 0,\end{cases}$$

где $0\le i<T$, а символ ∞ обозначает последовательность из всех нулей.

Алгоритм построения ИТП длины N_1N_2 состоит из четырех шагов:

1. Для некоторой ИТП **a** нечетной длины N_2 выбираются параметры $p\ge 2$, простое; $m\ge 1$; $k\ge 3$, нечетно, причем $(2N_2)\big|\left(p^m-1\right)$, и некоторый примитивный полином степени $n=km$ над $\mathrm{GF}(p)$.

2. Вычисляется последовательность сдвигов **e** длины $N_1=\left(p^n-1\right)/\left(p^m-1\right)$ p-ичной m-последовательности **d** длины p^n-1, соответствующей выбранному полиному.

3. Формируется матрица V порядка $N_1\times N_2$, i-я строка которой определяется как

$$\mathrm{str}_i=\begin{cases}(-1)^{(i+e_i)\bmod 2}\,L^{e_i \bmod N_2}(\mathbf{a}), & e_i\neq\infty,\\ 0\mathrm{K}\;0, & e_i=\infty,\end{cases}$$
$$0\le i<N_1,$$

где $L^s(\mathbf{a})$ – оператор циклического сдвига последовательности **a** влево на s разрядов.

4. Матрица V распаковывается по столбцам в последовательность **v**, которая является ИТП длины N_1N_2.

Анализ показывает, что если $(N_1,\,N_2)=1$, то ИТП **v** являются новыми, причем их длина совпадает с длиной комбинированных ИТП. В случае $(N_1,\,N_2)\neq 1$ длина полученных ИТП **v** может совпадать с длиной ИТП Ипатова или быть уникальной. Совпадение длин имеет место, когда ИТП **a** является последовательностью Ипатова длины $N_2=\left(p^{ef}-1\right)/\left(p^f-1\right)$, где $e\ge 3$, нечетно; $f\ge 1$, целое; $m=ef$. Заметим, что в этом случае только одна из множества ИТП **v** длины $N=\left(p^n-1\right)/\left(p^f-1\right)$ совпадает с ИТП Ипатова. Во всех остальных случаях ИТП **v** отличаются от известных ИТП, т. е. являются новыми. В этой связи необходимо отметить, что если последовательность $\mathbf{a}=\{1\}$, то последовательность **v** совпадает с ИТП Ипатова длины N_1. Пик-фактор этих последовательностей равен произведению пик-факторов ИТП длин N_1 и N_2. Поскольку N_1 ? N_2, пик-фактор (и, соответственно, энергетические потери) новой последовательности будет главным образом определяться пик-фактором ИТП длины N_2.

Для генерации периодических ИТП поступим следующим образом. Образуем из $\left(p^m-1\right)/N_2$ периодов последовательности **a** последовательность $\hat{\mathbf{a}}$ длины p^m-1. Далее, используя зависимость $b_{i+T}=\beta b_i$, получим, что общий член троичной последовательности $\mathbf{v}'=\{v_i'\}$, $0\le i<p^{mk}-1$, образованной из $\left(p^m-1\right)/N_2$ периодов ИТП **v** длины N_1N_2, может быть представлен как

$$v_i'=\begin{cases}(-1)^{i+z_i}\,\hat{a}_{z_i}, & b_i\neq 0;\\ 0, & b_i=0;\end{cases}\quad 0\le i<p^{mk}-1,$$

где $z_i=\log_\beta b_i$, $b_i\neq 0$ и $z_i=e_i$ для $0\le i<T$.

Положив

$$f\left(b_i\right)=\begin{cases}(-1)^{z_i}\,\hat{a}_{z_i}, & b_i\neq 0;\\ 0, & b_i=0;\end{cases}\quad 0\le i<p^{mk}-1,$$

окончательно имеем $v_i'=(-1)^i\,f\left(b_i\right)$.

Вычисление $f\left(b_i\right)$ можно существенно упростить, если вместо таблицы логарифмов использовать таблицу, ставящую в соответствие символу $b_i\in\mathrm{GF}\left(p^m\right)$ двухразрядное двоичное число, принимающее значение 10 при $f\left(b_i\right)=1$, значение 01 при $f\left(b_i\right)=-1$ и значение 00 при $f\left(b_i\right)=0$.

Элемент **c** поля $\mathrm{GF}(q)$, $q=p^m$, может быть представлен в виде суммы

$$c_{m-1}\beta^{m-1}+c_{m-2}\beta^{m-1}+\mathrm{K}+c_0,$$

где $c_i\in\mathrm{GF}(p)$, а β – примитивный элемент поля $\mathrm{GF}\left(p^m\right)$. Поэтому любому элементу **c** из $\mathrm{GF}\left(p^m\right)$ можно поставить в соответствие m-разрядное p-ичное число вида $(c_{m-1}, c_{m-2}, \mathrm{K}, c_0)$. В двоичном виде это число состоит из $\lceil m\log_2(p) \rceil$ разрядов и равно $\left(c_{m-1}p^{m-1} + c_{m-2}p^{m-1} + \mathrm{K} + c_0\right)_2$. С учетом этого таблица отображения может быть реализована с помощью перепрограммируемого постоянного запоминающего устройства (ППЗУ) объемом $p^m \times 2$, адресным входом в которое служит двоичное представление элемента **c** из $\mathrm{GF}(p^m)$. В результате блок преобразователя будет состоять из последовательно соединенных формирователя адреса, преобразующего *m*-разрядное *p*-ичное представление элемента поля $\mathrm{GF}(q)$ на выходе генератора *q*-ичной m-последовательности в $\lceil m\log_2(p) \rceil$-разрядное двоичное число, блока памяти объема $q \times 2$ и кодопреобразователя двухразрядного двоичного числа в символ троичного кода $\{-1, 0, 1\}$. Заметим, что при $q = p$ адресом для ППЗУ является непосредственно значение символа **c**. Поэтому формирователь адреса в блоке преобразователя отсутствует.

Генератор периодических идеальных троичных последовательностей длины N_1N_2, блок-схема которого представлена на рис. 3, содержит последовательно соединенные генератор 1 *q*-ичной m-последовательности длины $q^k - 1$, $q = p^m$, $m \geq 1$ и $k \geq 3$ – нечетно, и преобразователь *q*-ичного символа m-последовательности в символ троичного кода, состоящий из последовательно соединенных формирователя адреса 2, ППЗУ 3 и кодопреобразователя 4 двухразрядного двоичного кода в символ троичного кода. Выход кодопреобразователя подключен к первому входу умножителя 5, ко второму входу которого подключен генератор меандра 6.

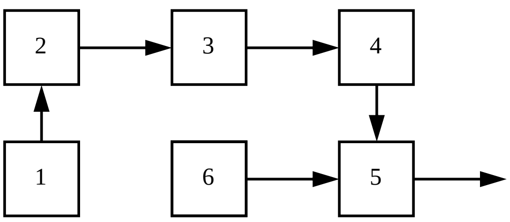

Рис. 3. Блок схема генератора ИТП длины N_1N_2

Fig. 3. Block diagram of PTS generator of length N_1N_2:
1 – generator of the m-sequence with length $q^k - 1$;
2 – address builder; 3 – PROM; 4 – code converter;
5 – multiplier; 6 – meander generator

Генератор комбинированных последовательностей длины N_1N_2 состоит из двух генераторов ИТП с длинами N_1 и N_2, выходы которых подключены к входам умножителя. Несколько более изощренной выглядит блок-схема генератора ИТП учетверенной длины [40]. В этом случае ИТП длины $4N$ строится на основе интерливинга (перемежения) двух последовательностей: последовательности, состоящей из двух периодов ИТП нечетной длины *N*, и почти идеальной троичной последовательности длины $2N$, имеющей в 2 раза большее число нулей, чем ИТП длины *N*.

Для построения генератора воспользуемся тем, что, во-первых, почти идеальная троичная последовательность является конкатенацией нечетно-идеальной троичной последовательности длины *N* и ее инверсии, во-вторых, результат умножения элементов нечетно-идеальной последовательности нечетной длины на знакопеременную последовательность вида $(-1)^i$ есть идеальная последовательность той же длины [40, 41]. Генератор ИТП длины $4N$ (рис. 4) состоит из генератора 1 знакопеременной последовательности, генераторов 2 и 3 ИТП нечетной длины *N* с тактовой частотой $f_\text{т}$, умножителя 4 и мультиплексора 5, объединяющего две входные последовательности в одну выходную. В результате на выходе мультиплексора образуется ИТП длины $4N$ с удвоенной частотой $2f_\text{т}$.

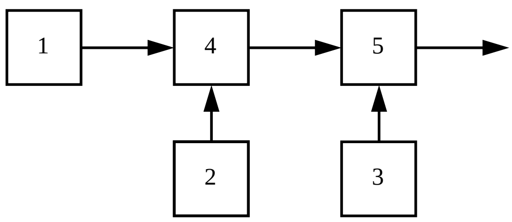

Рис. 4. Блок-схема генератора ИТП длины $4N$

Fig. 4. Block diagram of PTS with length $4N$:
1 – meander generator; 2, 3 – generators of the PTPs with odd length *N* and clock frequency $f_\text{т}$;
4 – multiplier; 5 – multiplexer

Заключение. В статье дан краткий ретроспективный обзор ИТП за их почти 60-летнюю историю и рассмотрены некоторые конструкции генераторов ИТП. Необходимость данной работы назревала уже несколько лет, поскольку последний обзор ИТП был сделан в 1996 г., а за прошедшие два десятилетия были открыты и исследованы новые многочисленные семейства ИТП. Интерес к ИТП вызван в первую очередь тем, что они обладают идеальными автокорреляционными свойствами, а их энергетическая эффективность с ростом длины стремится к единице, что делает возможным их применение в современных системах радиосвязи и радиолокации, в частности в CW- и LPI-радарах.

В представленном обзоре наряду с решением чисто информационно-библиографической задачи показана взаимосвязь полученных в разное время ИТП и их эквивалентность циркулянтным взвешенным матрицам.

Обзор может быть полезен для разработчиков систем различного назначения, в которых используются идеальные троичные последовательности.

Список литературы

1. Ипатов В. П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 151 с.

2. Fan P., Darnell M. Sequence Design for Communications Applications. London: Research Studies Press Ltd, 1996. 493 p.

3. Levanon N., Mozenson E. Radar Signals. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 411 p.

4. Pace P. E. Detecting and Classifying Low Probability of Intercept Radar. London: Artech House, 2009. 893 p.

5. Lee C. E. Perfect q-ary Sequences from Multiplicative Characters over GF(p) // Electronics Lett. 1992. Vol. 28, № 9. P. 833–835. doi: 10.1049/el:19920527

6. Lüke H. D. BTP-transform and Perfect Sequences with Small Phase Alphabet // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1996. Vol. AES-32, № 1. P. 497–499. doi:10.1109/7.481295

7. Schotten H. D., Lüke H. D. New Perfect and *w*-Cyclic-Perfect Sequences // Proc. 1996 IEEE Inter. Symp. on Information Theory. Victoria, British Columbia, Canada, 17–20 Sept. 1996. Piscataway: IEEE, 1996. P. 82–85.

8. Кренгель Е. И. Новые идеальные 4- и 8-фазные последовательности с нулями // Радиотехника. 2007. № 5. С. 3–7.

9. Levanon N., Freedman A. Periodic Ambiguity Function of CW Signals with Perfect Periodic Autocorrelation // IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Syst. 1992. Vol. AES-28, № 2. P. 387–395. doi:10.1109/7.144564

10. Chang J. A. Ternary Sequences with Zero-correlation // Proc. of the IEEE. 1997. Vol. 55, № 7. P. 1211–1213. doi: 10.1109/PROC.1967.5793

11. Green D. H., Kelsch R. G. Ternary pseudonoise sequences // Electronics Lett. 1972. Vol. 8, № 5. P. 112–113. doi: 10.1049/el:19720081

12. Moharir P. S. Generalized PN sequences // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1977. Vol. IT-23, iss. 6. P. 782–784. doi: 10.1109/TIT.1977.1055782

13. Sarwate D. V., Pursley M. B. Crosscorrelation of Pseudorandom and Related Sequences // Proc. of IEEE. 1980. Vol. 68, iss. 5. P. 593–619. doi: 10.1109/PROC.1980.11697

14. Gold R. Maximal Recursive Sequences with 3-valued Recursive Cross-Correlation Functions // IEEE Trans. Inform. Theory. 1968. Vol. IT-14, iss. 1. P. 154–156. doi: 10.1109/TIT.1968.1054106

15. Niho Y. Multivalued Cross-Correlation Functions between Two Maximal Linear Recursive Sequences: Ph. D. dissertation / Univ. Southern Calif. Los Angeles, 1972. 150 p. URL: http://digitallibrary.usc.edu/cdm/ref/collection/p15799coll37/id/51150 (дата обращения: 30.07.2019)

16. Kasami T. The Weight Enumerators for Several Classes of Subcodes of the 2nd Order Binary Reed-Muller Codes // Information and Control. 1971. Vol. 18, № 4. P. 369–394. doi: 10.1016/S0019-9958(71)90473-6

17. Helleseth T. Some Results about the Cross-Correlation Function between Two Maximal Linear Sequences // Discrete Mathematics. 1976. Vol. 16, iss. 3. P. 209–232. doi: 10.1016/0012-365X(76)90100-X

18. Shedd D. A., Sarwate D. V. Construction of Sequences with Good Correlation Properties // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1979. Vol. IT-25, iss. 1. P. 94–97. doi: 10.1109/TIT.1979.1055998

19. Ипатов В. П. Троичные последовательности с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 10. С. 2053–2057.

20. Hoholdt T., Justesen J. Ternary sequences with perfect periodic autocorrelation (Corresp.) // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1983. Vol. IT-29, iss. 4. P. 597–600. doi: 10.1109/TIT.1983.1056707

21. Ипатов В. П., Платонов В. Д., Самойлов И. М. Новый класс троичных последовательностей с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами// Изв. вузов СССР. Сер. Математика. 1983. № 3. С. 47–50.

22. Камалетдинов Б. Ж. Троичные последовательности с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 1. С. 77–82.

23. Golomb S. W., Gong G. Signal Design for Good Correlation: for Wireless Communication, Cryptography, and Radar. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 455 p.

24. Games R. A. Crosscorrelation of m-Sequences and GMW Sequences with the Same Primitive Polynomi-

al // Discrete Applied Mathematics. 1985. Vol. 12, iss. 2. P. 139–146. doi: 10.1016/0166-218X(85)90067-8

25. Antweiler M. Cross-correlation of p-ary GMW Sequences // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1984. Vol. IT-40, iss. 4. P. 1253–1261. doi: 10.1109/18.335941

26. Cusick T. W., Dobbertin H. Some New Three-Valued Crosscorrelation Functions for Binary m-Sequences // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1996. Vol. 42, iss. 4. P. 1238–1240. doi: 10.1109/18.508848

27. Canteaut A., Charpin P., Dobbertin H. Binary m-Sequences with Three-Valued Crosscorrelation: a Proof of Welch's Conjecture // IEEE Trans. on Inform. Theory. 2000. Vol. 46, iss. 1. P. 4–8. doi: 10.1109/18.817504

28. Hollmann H. D. L., Xiang Q. A Proof of the Welch and Niho Conjectures on Crosscorrelations of Binary m-Sequences // Finite Fields and Their Applications. 2001. Vol. 7, iss. 2. P. 253–286. doi: 10.1006/ffta.2000.0281

29. Helleseth T. On the Crosscorrelation of m-Sequences and Related Sequences with Ideal Autocorrelation // Sequences and Their Applications – SETA'01. Bergen, 2001. London: Springer, 2002. P. 34–45. doi: 10.1007/978-1-4471-0673-9_3

30. Hertel D. Cross-Correlation Properties of Perfect Binary Sequences // Proc. 2004 Inter. Conf. on Sequences and Their Applications – SETA'04. Seoul, Korea, 2004. Berlin: Springer, 2005. P. 208–219. (LNCS, vol. 3486)

31. Yu N. Y., Gong G. Crosscorrelation Properties of Binary Sequences // Sequences and Their Applications – SETA 2006. Lecture Notes in Computer Science, 2006, vol. 4086. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. P. 104–118. (LNCS, vol. 4086). doi: 10.1007/11863854_9

32. Games R. A. The Geometry of Quadrics and Correlations of Sequences (Corresp.) // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1986. Vol. 32, iss. 3. P. 423–426. doi: 10.1109/TIT.1986.1057184

33. Jackson W.-A., Wild P. R. Relations between Two Perfect Ternary Sequence Constructions // Design, Codes and Cryptography. 1992. Vol. 2, iss. 4. P. 325–322. doi: 10.1007/BF00125201

34. The Solution of the Waterloo Problem / K. T. Arasu, J. F. Dillon, D. Jungnickel, A. Pott // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. Vol. 71, iss. 2. P. 316–331. doi: 10.1016/0097-3165(95)90006-3

35. Jungnickel D., Pott A. Perfect and Almost Perfect Sequences // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 95, iss. 1–3. P. 331–359. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00085-2

36. Boztas S., Parampalli U. Nonbinary sequences with perfect and nearly perfect autocorrelations // 2010 IEEE Inter. Symp. on Inform. Theory. Austin, TX, USA, 13–18 June 2010. Piscataway: IEEE, 2010. P. 1300–1304. doi: 10.1109/ISIT.2010.5513729

37. Arasu K. T., Dillon J. F. Perfect Ternary Arrays // Difference Sets, Sequences and Their Correlation Properties (Bad Windsheim, 1998). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 1–15. (NATO ASIC, vol. 542). doi: 10.1007/978-94-011-4459-9_1

38. Arasu K. T. Sequences and Arrays with Desirable Correlation Properties // NATO Science for Peace and Security Series. D: Information and Communication Security. 2011. Vol. 29: Coding Theory and Related Combinatorics. P. 136–171. doi: 10.3233/978-1-60750-663-8-136

39. Antweiler M., Bomer L., Luke H. D. Perfect Ternary Arrays // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1990. Vol. 36, iss. 3. P. 696–705. doi: 10.1109/18.54895

40. Krengel E. I. New Polyphase Perfect Sequences with Small Alphabet // Electron. Lett. 2008. Vol. 44, № 17. P. 1013–1014. doi: 10.1049/el:20081401

41. Кренгель Е. И. Построение новых идеальных троичных последовательностей // Сб. докл. 19-й Междунар. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение". Москва, 29–31 марта 2017 г. / ИПУ РАН. М., 2017. С. 61–65.

42. Пат. RU 2665290 C1 МПК G06F 7/58 (2006.01). Генератор периодических идеальных троичных последовательностей / Е. И. Кренгель; опубл. 28.08.2018. Бюл. № 25.

43. Yang Y., Gong G., Tang X. H. Odd Perfect Sequences and Sets of Spreading Sequences with Zero or Low Odd Periodic Correlation Zone // Proc. 2010 Inter. Conf. on Sequences and Their Applications (SETA 2012). Waterloo, Canada, 4–8 June 2012. Berlin: Springer, 2012. P. 1–12. (LNCS, vol. 7280). doi: 10.1007/978-3-642-30615-0_1

44. Yang Y., Tang X. H., Gong G. New Almost Perfect, Odd Perfect, and Perfect Sequences from Difference Balanced Functions with d-Form Property // Advances in mathematics on communication. 2017. Vol. 11, № 1. P. 67–76. doi: 10.3934/amc.2017002

45. Пат. SU 1244658 A1 G06F 7/00 (2000.01). Устройство для определения двузначного характера элементов конечного поля/ В. П. Ипатов, В. И. Корниевский, О. И. Корнилов, В. Д. Платонов; опубл. 15.07.1986. Бюл. № 26.

Информация об авторе

Кренгель Евгений Ильич – кандидат технических наук (2002), ведущий научный сотрудник Акционерного общества "Современные беспроводные технологии" (АО "СБТ"). Автор 75 научных работ. Сфера научных интересов – широкополосные системы связи с многостанционным доступом; псевдослучайные последовательности и их применение в радиотехнических системах.
E-mail: krengel@sbtcom.ru, evg.krengel@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9116-8057

References

1. Ipatov V. P. *Periodicheskie diskretnye signaly s optimal'nymi korrelyatsionnymi svoistvami* [Periodic discrete signals with optimal properties]. Moscow, *Radio i svyaz*, 1992, 151 p. (In Russ.)

2. Fan P., Darnell M. Sequence Design for Communications Applications. London, Research Studies Press Ltd, 1996, 493 p.

3. Levanon N., Mozenson E. Radar Signals. New Jersey, John Wiley & Sons, 2004, 411 p.

4. Pace P. E. Detecting and Classifying Low Probability of Intercept Radar. London, Artech House, 2009, 893 p.

5. Lee C.E. Perfect q-ary Sequences from Multiplicative Characters over GF(p). Electronics Letters. 1992, vol. 28, no. 9, pp. 833–835. doi: 10.1049/el:19920527

6. Lüke H. D. BTP-transform and Perfect Sequences with Small Phase Alphabet. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1996, vol. AES-32, no. 1, pp. 497–499. doi:10.1109/7.481295

7. Schotten H. D., Lüke H. D. New Perfect and *w*-Cyclic-Perfect Sequences. Proc. 1996 IEEE Inter. Symp. on Information Theory. Victoria, British Columbia, Canada, 17–20 September, 1996. Piscataway, IEEE, 1996, pp. 82–85.

8. Krengel E. I. New Perfect 4- and 8-Phase Sequences with Zeros. *Radiotekhnika* [Radioengineering]. 2007, no. 5, pp. 3–7. (In Russ.)

9. Levanon N., Freedman A. Periodic Ambiguity Function of CW Signals with Perfect Periodic Autocorrelation. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1992, vol. AES-28, no. 2, pp. 387–395. doi:10.1109/7.144564

10. Chang J. A. Ternary Sequences with Zero-correlation. Proc. of the IEEE. 1997, vol. 55, no. 7, pp. 1211–1213. doi: 10.1109/PROC.1967.5793

11. Green D. H., Kelsch R. G. Ternary pseudonoise sequences. Electronics letters. 1972, vol. 8, no. 5, pp. 112–113. doi: 10.1049/el:19720081

12. Moharir P. S. Generalized PN sequences. IEEE Trans. on Information Theory. 1977, vol. IT-23, iss. 6, pp. 782–784. doi: 10.1109/TIT.1977.1055782

13. Sarwate D. V., Pursley M. B. Crosscorrelation of Pseudorandom and Related Sequences. Proc. of IEEE. 1980, vol. 68, iss. 5, pp. 593–619. doi: 10.1109/PROC.1980.11697

14. Gold R. Maximal Recursive Sequences with 3-valued Recursive Cross-Correlation Functions. IEEE Trans. Inform. Theory. 1968, vol. IT-14, iss. 1, pp. 154–156. doi: 10.1109/TIT.1968.1054106

15. Niho Y. Multivalued Cross-Correlation Functions between Two Maximal Linear Recursive Sequences: Ph. D. dissertation. Univ. Southern Calif. Los Angeles, 1972. 150 p. Available at: http://digitallibrary.usc.edu/cdm/ref/collection/p15799coll37/id/51150 (accessed 30.07.2019)

16. Kasami T. The Weight Enumerators for Several Classes of Subcodes of the 2nd Order Binary Reed-Muller Codes. Information and Control. 1971, vol. 18, no. 4, pp. 369–394. doi: 10.1016/S0019-9958(71)90473-6

17. Helleseth T. Some Results about the Cross-Correlation Function between Two Maximal Linear Sequences. Discrete Mathematics. 1976, vol. 16, iss. 3, pp. 209–232. doi: 10.1016/0012-365X(76)90100-X

18. Shedd D. A., Sarwate D. V. Construction of Sequences with Good Correlation Properties. IEEE Trans. on Information Theory. 1979, vol. IT-25, iss. 1, pp. 94–97. doi: 10.1109/TIT.1979.1055998

19. Ipatov V. P. *Troichnye posledovatel'nosti s ideal'nymi periodicheskimi avtokorreljacionnymi svojstvami* [Ternary Sequences with Ideal Periodic Autocorrelation Properties]. Radio Eng. Electron. 1979, vol. 24, no. 10, pp. 2053–2057. (In Russ.)

20. Hoholdt T., Justesen J. Ternary sequences with perfect periodic autocorrelation (Corresp.). IEEE Trans. on Information Theory. 1983, vol. IT-29, iss. 4, pp. 597–600. doi: 10.1109/TIT.1983.1056707

21. Ipatov V. P., Platonov V. D., Samoilov I. M. A New Class of Triple Sequences with Ideal Periodic Autocorrelation Properties. *Izvestiya vyzov USSR*. Mathematics. 1983, no. 3, pp 47–50. (In Russ.)

22. Kamaletdinov B. S. *Troichnye posledovatel'nosti s ideal'nymi periodicheskimi avtokorreljacionnymi svojstvami* [Ternary Sequences with Ideal Periodic Autocorrelation Properties]. Radio Eng. Electron. 1987, vol. 32, no. 1, pp. 77–82. (In Russ.)

23. Golomb S. W., Gong G. Signal Design for Good Correlation: for Wireless Communication, Cryptography, and Radar. Cambridge, Cambridge University Press, 2005, 455 p.

24. Games R. A. Crosscorrelation of m-Sequences and GMW Sequences with the Same Primitive Polynomial. Discrete Applied Mathematics. 1985, vol. 12, iss. 2, pp. 139–146. doi: 10.1016/0166-218X(85)90067-8

25. Antweiler M. Cross-correlation of p-ary GMW Sequences. IEEE Trans. on Information Theory. 1984, vol. IT-40, iss. 4, pp. 1253–1261. doi: 10.1109/18.335941

26. Cusick T. W., Dobbertin H. Some New Three-Valued Crosscorrelation Functions for Binary m-Sequences. IEEE Trans. on Information Theory. 1996, vol. 42, iss. 4, pp. 1238–1240. doi: 10.1109/18.508848

27. Canteaut A., Charpin P., Dobbertin H. Binary m-Sequences with Three-Valued Crosscorrelation: a Proof of Welch's Conjecture. IEEE Trans. on Information Theory. 2000, vol. 46, iss. 1, pp. 4–8. doi: 10.1109/18.817504

28. Hollmann H. D. L., Xiang Q. A Proof of the Welch and Niho Conjectures on Crosscorrelations of Binary m-Sequences. Finite Fields and Their Applications. 2001, vol. 7, iss. 2, pp. 253–286. doi: 10.1006/ffta.2000.0281

29. Helleseth T. On the Crosscorrelation of m-Sequences and Related Sequences with Ideal Autocorre-

lation. Sequences and Their Applications – SETA'01. 2001, Bergen. London, Springer, 2002, pp. 34–45. doi: 10.1007/978-1-4471-0673-9_3

30. Hertel D. Cross-Correlation Properties of Perfect Binary Sequences. Proc. 2004 Inter. Conf. on Sequences and Their Applications – SETA'04. Seoul, Korea, 2004. Berlin, Springer, 2005, pp. 208–219. (LNCS, vol. 3486)

31. Yu N. Y., Gong G. Crosscorrelation Properties of Binary Sequences. Sequences and Their Applications – SETA 2006. Lecture Notes in Computer Science, 2006, vol. 4086. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006, pp. 104–118. (LNCS, vol. 4086). doi: 10.1007/11863854_9

32. Games R. A. The Geometry of Quadrics and Correlations of Sequences (Corresp.). IEEE Trans. on Information Theory, 1986, vol. 32, iss. 3, pp. 423–426. doi: 10.1109/TIT.1986.1057184

33. Jackson W.-A., Wild P. R. Relations between Two Perfect Ternary Sequence Constructions. Design, Codes and Cryptography. 1992, vol. 2, iss. 4, pp. 325–322. doi: 10.1007/BF00125201

34. Arasu K. T., Dillon J. F., Jungnickel D., Pott A. The Solution of the Waterloo Problem. J. Combin. Theory. Ser. A. 1995, vol. 71, iss. 2, pp. 316–331. doi: 10.1016/0097-3165(95)90006-3

35. Jungnickel D., Pott A. Perfect and Almost Perfect Sequences. Discrete Appl. Math. 1999, vol. 95, iss. 1–3, pp. 331–359. doi: 10.1016/S0166-218X(99)00085-2

36. Boztas S., Parampalli U. Nonbinary sequences with perfect and nearly perfect autocorrelations. 2010 IEEE Inter. Symp. on Information Theory. 13–18 June 2010, Austin, TX, USA. Piscataway, IEEE, 2010, pp. 1300–1304. doi: 10.1109/ISIT.2010.5513729

37. Arasu K. T., Dillon J. F. Perfect Ternary Arrays. Difference Sets, Sequences and Their Correlation Properties (Bad Windsheim, 1998). Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999, pp. 1–15. (NATO ASIC, vol. 542). doi: 10.1007/978-94-011-4459-9_1

38. Arasu K. T. Sequences and Arrays with Desirable Correlation Properties. NATO Science for Peace and Security Series. D: Information and Communication Security. Vol. 29: Coding Theory and Related Combinatorics. 2011, pp. 136–171. doi: 10.3233/978-1-60750-663-8-136

39. Antweiler M., Bomer L., Luke H. D. Perfect Ternary Arrays. IEEE Trans. on Information Theory. 1990, vol. 36, iss. 3, pp. 696–705. doi: 10.1109/18.54895

40. Krengel E. I. New Polyphase Perfect Sequences with Small Alphabet. Electron. Lett. 2008, vol. 44, no. 17, pp. 1013–1014. doi: 10.1049/el:20081401

41. Krengel E. I. Construction of New Perfect Ternary Sequences. Proc. of 19th Intern. Conf. on Digital Signal Processing (DSPA-2017), 29–31 March, 2017, Moscow. Institute of Control Sciences RAS. Moscow, 2017, pp. 61–65. (In Russ.)

42. Krengel E. I. Periodic Ideal Ternary Sequence Generator. Pat. RU 2665290 C1, Priority date 2017-08-17 (In Russ.)

43. Yang Y., Gong G., Tang X. H. Odd Perfect Sequences and Sets of Spreading Sequences with Zero or Low Odd Periodic Correlation Zone. Proc. 2010 Inter. Conf. on Sequences and Their Applications (SETA 2012). 4–8 June 2012, Waterloo, Canada. Berlin, Springer, 2012, pp. 1–12. (LNCS, vol. 7280). doi: 10.1007/978-3-642-30615-0_1

44. Yang Y., Tang X.H., Gong G. New Almost Perfect, Odd Perfect, and Perfect Sequences from Difference Balanced Functions with d-Form Property. Advances in mathematics on communication. 2017, vol. 11, no. 1, pp. 67–76. doi: 10.3934/amc.2017002

45. Ipatov V. P., Kornievskii V. I., Kornilov O. I., Platonov V. D. Device for Determining the Two-Digit Nature of the Elements of the Final Feld. Pat. SU 1244658 A1. Priority date 1984-01. (In Russ.)

Information about the author

Evgeny I. Krengel – Cand. Sci. (Engineering) (2002), leading researcher of the JSC "Modern wireless technologies". The author of 75 scientific publications. Area of expertise: broadband communication systems with multiple access; pseudorandom sequences and their application in radio systems.
E-mail: krengel@sbtcom.ru, evg.krengel@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9116-8057