

DOI: 10.32603/1993-8985-2018-21-6-91-101
УДК 620.179.16

К. Е. Аббакумов, Н. В. Степаненко
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)
ул. Профессора Попова, д. 5, Санкт-Петербург, 197376, Россия

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ТРУБЕ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОЙ ЖЕСТКОСТИ¹

Аннотация. Двухслойные трубы получают все более широкое распространение в различных областях промышленности и хозяйственной деятельности. Применение такого класса изделий обусловлено особыми условиями эксплуатации. Это повышенная температура, агрессивная среда, повышенное давление. Такие изделия зачастую имеют ограниченный доступ. Поэтому невозможно использовать методы контроля, предполагающие полное сканирование поверхности, без полного извлечения изделия из рабочей среды.

Статья посвящена исследованию распространения волн в двухслойной трубе с учетом жесткости контакта между ее слоями.

Рассмотрено распространение волн в двухслойной трубе с известными упругими параметрами материалов. Аналитическим решением уравнения движения относительно векторного и скалярного потенциалов получено дисперсионное уравнение. Оно описывает частотное распределение фазовых скоростей возможных волн в исследуемом волноводе. Аналогичным образом получено дисперсионное уравнение для двухслойной трубы с учетом степени жесткости контакта между слоями. Для этого в граничные условия введены дополнительные слагаемые, включающие нормальный и тангенциальный коэффициенты контактной жесткости. Показано, что в обоих случаях крутильные волны отделяются от других видов волн и могут быть рассмотрены отдельно.

На основе численного решения дисперсионного уравнения рассмотрено возможное поведение дисперсионных кривых без учета контактной жесткости, а также с учетом контактной жесткости при различных коэффициентах перфорации. Сделан вывод о влиянии контакта между слоями на поведение крутильных волн в двухслойной трубе. Аналогичным методом решена задача для модели однородной трубы с внутренним расслоением.

Даны рекомендации по учету выявленных закономерностей при создании ультразвуковых методов контроля, основанных на распространении крутильных волн.

Ключевые слова: нормальные волны, крутильные волны, неразрушающий контроль, ультразвук, труба, дисперсионные кривые

Для цитирования: Аббакумов К. Е., Степаненко Н. В. Распространение крутильных волн в двухслойной трубе с учетом контактной жесткости // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 6. С. 91–101.
doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-6-91-101

Konstantin E. Abbakumov, Nikolay V. Stepanenko
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5, Professor Popov Str., 197376, St. Petersburg, Russia

TORSIONAL WAVE SCATTERING IN TWO-LAYER PIPE WITH ACCOUNT FOR CONTACT RIGIDITY

Abstract. The purpose of the paper is to study the wave propagation in a two-layer pipe, taking into account the rigidity of the contact between its layers. It is considered by solving the equation of motion for the vector and scalar

¹ Работа выполнена в рамках государственной работы "Проведение научно-исследовательских работ (фундаментальных научных исследований, прикладных научных исследований и экспериментальных разработок)" базовой части государственного задания Минобрнауки России (код проекта: 8.6743.2017/8.9).

potentials. A dispersion equation describing the frequency distribution of the phase velocities of waves in the waveguide under investigation is derived. In order to take into account the degree of contact rigidity between layers additional terms are added to the boundary conditions, including the normal (k_{GN}) and tangential (k_{GT}) contact rigidity coefficients. It is shown that torsional waves are separated from other types of waves and can be considered separately. The example of a numerical solution of the dispersion equation shows the possible behavior of dispersion curves without regard to the contact rigidity. The similar problem solution is provided with allowance for contact rigidity at various perforation coefficients. A conclusion is drawn on the effect of contact between layers on torsional wave behavior. The similar method solves the problem for a homogeneous pipe with internal stratification. Recommendations are given for taking into account the revealed regularities in the development of ultrasonic methods of control based on torsional wave propagation.

Key words: guided waves, torsional waves, non-destructive testing, ultrasonic, pipe, dispersion curves

For citation: Abbakumov K. E., Stepanenko N.V. Torsional Wave Scattering in Two-Layer Pipe with Account for Contact Rigidity. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2018, no. 6, pp. 91–101. doi; 10.32603/1993-8985-2018-21-6-91-101 (In Russian) (In Russian)

Введение. Двухслойные трубы получают все более широкое распространение в различных областях промышленности и хозяйственной деятельности. В зависимости от необходимых свойств могут быть использованы как биметаллические изделия, так и металлические трубы с покрытием из полимерных материалов. Так, например, все чаще в качестве пульпопроводов гидротранспортировки в добывающей промышленности используют трубы с износостойким внутренним слоем и внешним слоем из низкоуглеродистой стали (сочетание сталей 30Л и Х12). Применение такого класса изделий обусловлено особыми условиями эксплуатации, такими, как повышенная температура, агрессивная среда, повышенное давление, и зачастую имеет ограниченный доступ, ввиду чего невозможно использовать методы контроля, предполагающие полное сканирование поверхности, без полного извлечения изделия из рабочей среды.

В этих условиях в ряде работ, как отечественных [1]–[4], так и зарубежных [5]–[14], была показана эффективность волноводных методов контроля, в том числе основанных на распространении крутильных волн, для сплошного контроля труб без полного доступа.

Применительно к двухслойным трубам важно учитывать взаимодействие внутреннего и внешнего слоев. В [15] показано влияние такого взаимодействия для продольных волн. Из результатов работы следует, что дополнительные слои существенно влияют на характер дисперсионных кривых. В [16] представлена программа GUIGUW, позволяющая методом конечных элементов получить семейство дисперсионных кривых для различных типов волн, для протяженных моделей разного поперечного сечения, в том числе и двухслойной трубы, с произвольными свойствами материалов.

В настоящей статье рассмотрено распространение волн в двухслойной трубе с учетом жесткости контакта между ее слоями. При этом становится возможным как оценивать расслоение в двухслойной среде, так и получить дополнительный информативный параметр для обнаружения дефектов в однородной трубе.

Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную бесконечную трубу (рис. 1) с внутренним диаметром $2r_1$, внешним диаметром $2r_3$ и диаметром границы между слоями $2r_2$. Ось z цилиндрической системы координат расположим на оси трубы. Пространство внутренней трубы, ограниченное цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 , обозначим индексом I, внешней, ограниченное цилиндрами с радиусами r_2 и r_3 , – индексом II.

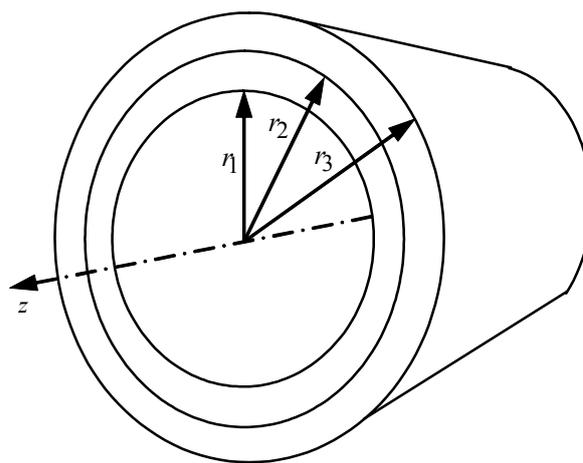


Рис. 1

Математическая модель. Для описания распространения колебаний в представленном объекте воспользуемся подходом, предложенным в [17], [18]. Для этого запишем уравнения движения относи-

тельно потенциальных функций через векторный потенциал $\Psi = \{\Psi_r, \Psi_\theta, \Psi_z\}$ и скалярный потенциал ϕ в цилиндрической системе координат r, θ, z :

$$c_{I,II}^2 \nabla^2 \phi_{I,II} = \partial^2 \phi_{I,II} / \partial t^2; \quad (1)$$

$$c_{tI,II}^2 \nabla^2 \Psi_{I,II} = \partial^2 \Psi_{I,II} / \partial t^2, \quad (2)$$

где

$$c_{I,II}^2 = (\lambda_{I,II} + 2\mu_{I,II}) / \rho_{I,II};$$

$$c_{tI,II}^2 = \mu_{I,II} / \rho_{I,II}$$

– скорость распространения продольной (longitudinal) и поперечной (transversal) упругих волн соответственно, причем $\lambda_{I,II}, \mu_{I,II}$ – постоянные Ламэ; $\rho_{I,II}$ – объемные плотности сред.

Положим, что решения уравнений имеют вид:

$$\phi_{I,II} = f_{I,II}(r) \cos(n\theta) \cos(\omega t - \gamma r); \quad (3)$$

$$\Psi_{rI,II} = h_{rI,II}(r) \sin(n\theta) \sin(\omega t - \gamma r); \quad (4)$$

$$\Psi_{\theta I,II} = h_{\theta I,II}(r) \cos(n\theta) \sin(\omega t - \gamma r); \quad (5)$$

$$\Psi_{zI,II} = h_{zI,II}(r) \sin(n\theta) \cos(\omega t - \gamma r), \quad (6)$$

где $n = \overline{0, N}$ – угловой индекс моды колебаний; ω – циклическая частота колебаний; $\gamma = \omega/c$ – волновое число.

Подставив (3) в уравнение движения (1) получим выражение для $f_{I,II}$:

$$f_{I,II}'' + f_{I,II}'/r + (\alpha_{I,II}^2 - n^2/r^2) f_{I,II} = 0, \quad (7)$$

где $\alpha_{I,II}^2 = \omega^2/c_{I,II}^2 - \gamma^2$.

После замены переменной $s = \alpha r$ (7) приводится к уравнению Бесселя:

$$f_{I,II}'' + f_{I,II}'/s + (1 - n^2/s^2) f_{I,II} = 0. \quad (8)$$

Подставив (4)–(6) в (2) аналогично получим:

$$h_{zI,II}'' + h_{zI,II}'/r + (\beta_{I,II}^2 - n^2/r^2) h_{zI,II} = 0, \quad (9)$$

где $\beta_{I,II}^2 = \omega^2/c_{tI,II}^2 - \gamma^2$.

Для функций $h_{rI,II}$ и $h_{\theta I,II}$ получается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} h_{rI,II}'' + \frac{h_{rI,II}'}{r} + \frac{-n^2 h_{rI,II} + 2n h_{rI,II} - h_{rI,II}}{r^2} + \\ + \frac{\omega}{c_{II,II}^2} h_{rI,II} = 0; \\ h_{\theta I,II}'' + \frac{h_{\theta I,II}'}{r} + \frac{-n^2 h_{\theta I,II} + 2n h_{\theta I,II} - h_{\theta I,II}}{r^2} + \\ + \frac{\omega}{c_{II,II}^2} h_{\theta I,II} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Вычтя и сложив уравнения (10) получим:

$$\begin{aligned} & (h_{rI,II}'' - h_{\theta I,II}'') + \frac{h_{rI,II}' - h_{\theta I,II}'}{r} + \\ & + \left[\beta_{I,II}^2 - \left(\frac{n+1}{r} \right)^2 \right] (h_{rI,II} - h_{\theta I,II}) = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & (h_{rI,II}'' + h_{\theta I,II}'') + \frac{1}{r} (h_{rI,II}' + h_{\theta I,II}') + \\ & + \left[\beta_{I,II}^2 - \left(\frac{n+1}{r} \right)^2 \right] (h_{rI,II} + h_{\theta I,II}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решения уравнений (8), (9), (11), (12) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_I(r) &= A_1 Z_n(\alpha r) + A_2 W_n(\alpha r); \\ h_{zI}(r) &= A_3 Z_n(\alpha r) + A_4 W_n(\alpha r); \\ h_{rI} - h_{\theta I}(r) &= 2A_5 Z_{n+1}(\alpha r) + 2A_6 W_{n+1}(\alpha r); \\ h_{rI}(r) + h_{\theta I}(r) &= 2A_{13} Z_{n-1}(\alpha r) + 2A_{14} W_{n-1}(\alpha r); \\ f_{II}(r) &= A_7 Z_n(\alpha r) + A_8 W_n(\alpha r); \\ h_{zII}(r) &= A_9 Z_n(\alpha r) + A_{10} W_n(\alpha r); \\ h_{rII}(r) - h_{\theta II}(r) &= 2A_{11} Z_{n+1}(\alpha r) + 2A_{12} W_{n+1}(\alpha r); \\ h_{rII}(r) + h_{\theta II}(r) &= 2A_{15} Z_{n-1}(\alpha r) + 2A_{16} W_{n-1}(\alpha r), \end{aligned}$$

где при действительном аргументе $Z_n = J_n$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка; $W_n = Y_n$ – функция Бесселя второго рода n -го порядка; при мнимом аргументе $Z_n = I_n$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка; $W_n = K_n$ – модифицированная функция Бесселя второго рода n -го порядка.

Согласно свойству калибровочной инвариантности [19] возможно однозначно определить вектор движения через 3 компоненты. На основании этого допущения примем:

$$h_{rI,II} = -h_{\theta I,II}.$$

Таким образом, поле смещения в цилиндрическом упругом стержне выражается функциями:

$$\begin{cases} U_{rI, II} = \left[f'_{I, II} + (n/r)h_{zI, II} + \gamma h_{rI, II} \right] \times \\ \quad \times \cos(n\theta) \cos(\omega t + \gamma z); \\ U_{\theta I, II} = \left[-(n/r)f_{I, II} - h'_{zI, II} + \gamma h_{rI, II} \right] \times \\ \quad \times \sin(n\theta) \cos(\omega t + \gamma z); \\ U_{zI, II} = \left\{ -\gamma f_{I, II} - [(n+1)/r]h_{rI, II} - h'_{rI, II} \right\} \times \\ \quad \times \cos(n\theta) \sin(\omega t + \gamma z). \end{cases} \quad (13)$$

Для составления дисперсионного уравнения воспользуемся граничными условиями, заключающимися в равенстве нулю компонент тензора напряжений на свободной поверхности цилиндра и непрерывности тензоров напряжения и смещений на границе раздела:

$$\begin{aligned} (\sigma_{rrI} = \sigma_{rzI} = \sigma_{r\theta I}) \Big|_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_{rrII} = \sigma_{rzII} = \sigma_{r\theta II}) \Big|_{r=r_3} &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rrI} = \sigma_{rrII} \\ \sigma_{rzI} = \sigma_{rzII} \\ \sigma_{r\theta I} = \sigma_{r\theta II} \\ U_{rI} = U_{rII} \\ U_{zI} = U_{zII} \\ U_{\theta I} = U_{\theta II} \end{cases} \Big|_{r=r_2} \quad (15)$$

Компоненты тензора напряжения связаны с компонентами тензора деформации законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rrI, II} = \lambda \left(\frac{\partial U_{rI, II}}{\partial r} + \frac{\partial U_{zI, II}}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\theta I, II}}{\partial \theta} + \frac{U_{rI, II}}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial U_{rI, II}}{\partial r}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_{r\theta I, II} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_{rI, II}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{\theta I, II}}{\partial r} - \frac{U_{\theta I, II}}{r} \right); \quad (17)$$

$$\sigma_{rzI, II} = \mu \left(\frac{\partial U_{rI, II}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zI, II}}{\partial r} \right). \quad (18)$$

Подставив (13) в функции (16)–(18), учитывая соотношения (7), (9) и (10), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rrI, II} = \left\{ -\lambda_{I, II} \left(\alpha_{I, II}^2 + \gamma^2 \right) f_{I, II} + \right. \\ \left. + 2\mu \left[f''_{I, II} + \frac{n}{r} \left(h'_{zI, II} - \frac{1}{r} h_{zI, II} \right) + \gamma h'_{rI, II} \right] \right\} \times \\ \times \cos(n\theta) \cos(\omega t + \gamma z); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta I, II} = \mu \left[\frac{2n}{r} \left(\frac{1}{r} f_{I, II} - f'_{I, II} \right) + \right. \\ \left. + \left(\beta_{I, II}^2 h_{zI, II} - 2h'_{zI, II} \right) + \gamma \left(h'_{rI, II} - \frac{n+1}{r} h_{rI, II} \right) \right] \times \\ \times \sin(n\theta) \cos(\omega t + \gamma z); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rzI, II} = \mu \left[-2\gamma f'_{I, II} - \frac{n\gamma}{r} h_{zI, II} - \frac{n}{r} h'_{rI, II} - \right. \\ \left. - \left(\frac{n^2 - n - 1}{r^2} - \beta_{I, II}^2 + \gamma^2 \right) h_{rI, II} \right] \times \\ \times \cos(n\theta) \sin(\omega t + \gamma z). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (13), (19)–(21) в граничные условия (14), (15), получим систему

$$|a_{i,j}| = 0,$$

где $a_{i,j}$ ($i, j = \overline{1, 12}$) – коэффициенты, определяющие дисперсионное уравнение, вычисляемые следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= Z'_n(\alpha_I r_2); \\ a_{1,2} &= W'_n(\alpha_I r_2); \\ a_{1,3} &= \gamma Z_{n+1}(\beta_I r_2); \\ a_{1,4} &= \gamma W_{n+1}(\beta_I r_2); \\ a_{1,5} &= (n/r_2) Z_n(\beta_I r_2); \\ a_{1,6} &= (n/r_2) W_n(\beta_I r_2); \\ a_{1,7} &= -Z'_n(\alpha_{II} r_2); \\ a_{1,8} &= -W'_n(\alpha_{II} r_2); \\ a_{1,9} &= -\gamma Z_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\ a_{1,10} &= -\gamma W_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\ a_{1,11} &= -(n/r_2) Z_n(\beta_{II} r_2); \\ a_{1,12} &= -(n/r_2) W_n(\beta_{II} r_2); \\ a_{2,1} &= -(n/r_2) Z_n(\alpha_I r_2); \\ a_{2,2} &= -(n/r_2) W_n(\alpha_I r_2); \\ a_{2,3} &= \gamma Z_{n+1}(\beta_I r_2); \\ a_{2,4} &= \gamma W_{n+1}(\beta_I r_2); \\ a_{2,5} &= -Z'_n(\beta_I r_2); \\ a_{2,6} &= -W'_n(\beta_I r_2); \\ a_{2,7} &= (n/r_2) Z_n(\alpha_{II} r_2); \\ a_{2,8} &= (n/r_2) W_n(\alpha_{II} r_2); \\ a_{2,9} &= -\gamma Z_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\ a_{2,10} &= -\gamma W_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\ a_{2,11} &= Z'_n(\beta_{II} r_2); \\ a_{2,12} &= W'_n(\beta_{II} r_2); \\ a_{3,1} &= -\gamma Z_n(\alpha_I r_2); \\ a_{3,2} &= -\gamma W_n(\alpha_I r_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{3,3} &= -[(n+1)/r_2] Z_{n+1}(\beta_I r_2) - Z'_{n+1}(\beta_I r_2); \\
 a_{3,4} &= -[(n+1)/r_2] W_{n+1}(\beta_I r_2) - W'_{n+1}(\beta_I r_2); \\
 a_{3,5} &= 0; \\
 a_{3,6} &= 0; \\
 a_{3,7} &= \gamma Z_n(\alpha_{II} r_2); \\
 a_{3,8} &= \gamma W_n(\alpha_{II} r_2); \\
 a_{3,9} &= [(n+1)/r_2] Z_{n+1}(\beta_{II} r_2) + Z'_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\
 a_{3,10} &= [(n+1)/r_2] W_{n+1}(\beta_{II} r_2) + W'_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\
 a_{3,11} &= 0; \\
 a_{3,12} &= 0; \\
 a_{4,1} &= -\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) Z_n(\alpha_I r_2) + 2\mu_I Z_n''(\alpha_I r_2); \\
 a_{4,2} &= -\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) W_n(\alpha_I r_2) + 2\mu_I W_n''(\alpha_I r_2); \\
 a_{4,3} &= 2\mu_I \gamma Z'_{n+1}(\beta_I r_2); \\
 a_{4,4} &= 2\mu_I \gamma W'_{n+1}(\beta_I r_2); \\
 a_{4,5} &= 2\mu_I (n/r_2) [Z'_n(\beta_I r_2) - (1/r_2) Z_n(\beta_I r_2)]; \\
 a_{4,6} &= 2\mu_I (n/r_2) [W'_n(\beta_I r_2) - (1/r_2) W_n(\beta_I r_2)]; \\
 a_{4,7} &= \lambda_{II} (\alpha_{II}^2 + \gamma^2) Z_n(\alpha_{II} r_2) - 2\mu_{II} Z_n''(\alpha_{II} r_2); \\
 a_{4,8} &= \lambda_{II} (\alpha_{II}^2 + \gamma^2) W_n(\alpha_{II} r_2) + 2\mu_{II} W_n''(\alpha_{II} r_2); \\
 a_{4,9} &= -2\mu_{II} \gamma W'_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\
 a_{4,10} &= -2\mu_{II} \gamma W'_{n+1}(\beta_{II} r_2); \\
 a_{4,11} &= -2\mu_{II} (n/r_2) [Z'_{n+1}(\beta_{II} r_2) - (1/r_2) Z_{n+1}(\beta_{II} r_2)]; \\
 a_{4,12} &= -2\mu_{II} (n/r_2) [W'_{n+1}(\beta_{II} r_2) - (1/r_2) W_{n+1}(\beta_{II} r_2)]; \\
 a_{5,1} &= 2\mu_I (n/r_2) [(1/r_2) Z_n(\alpha_I r_2) - Z'_n(\alpha_I r_2)]; \\
 a_{5,2} &= 2\mu_I (n/r_2) [(1/r_2) W_n(\alpha_I r_2) - W'_n(\alpha_I r_2)]; \\
 a_{5,3} &= \mu_I \gamma \{ Z'_{n+1}(\beta_I r_2) - [(n+1)/r_2] Z_{n+1}(\beta_I r_2) \}; \\
 a_{5,4} &= \mu_I \gamma \{ W'_{n+1}(\beta_I r_2) - [(n+1)/r_2] W_{n+1}(\beta_I r_2) \}; \\
 a_{5,5} &= \mu_I [\beta_I^2 Z_n(\beta_I r_2) - Z'_n(\beta_I r_2)]; \\
 a_{5,6} &= \mu_I [\beta_I^2 W_n(\beta_I r_2) - W'_n(\beta_I r_2)]; \\
 a_{5,7} &= -2\mu_{II} (n/r_2) [(1/r_2) Z_n(\alpha_{II} r_2) - Z'_n(\alpha_{II} r_2)]; \\
 a_{5,8} &= -2\mu_{II} (n/r_2) [(1/r_2) W_n(\alpha_{II} r_2) - W'_n(\alpha_{II} r_2)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{5,9} &= -\mu_{II} \gamma \{ Z'_{n+1}(\beta_{II} r_2) - [(n+1)/r_2] Z_{n+1}(\beta_{II} r_2) \}; \\
 a_{5,10} &= \mu_{II} \gamma \{ W'_{n+1}(\beta_{II} r_2) - [(n+1)/r_2] W_{n+1}(\beta_{II} r_2) \}; \\
 a_{5,11} &= \mu_{II} [\beta_{II}^2 Z_n(\beta_{II} r_2) - Z'_n(\beta_{II} r_2)]; \\
 a_{5,12} &= \mu_{II} [\beta_{II}^2 W_n(\beta_{II} r_2) - W'_n(\beta_{II} r_2)]; \\
 a_{6,1} &= -2\mu_I \gamma [Z'_n(\alpha_I r_2)]; \\
 a_{6,2} &= -2\mu_I \gamma [W'_n(\alpha_I r_2)]; \\
 a_{6,3} &= -\mu_I ((n/r_2) Z'_{n+1}(\beta_I r_2) + \\
 &+ \{ [(n^2 - n - 1)/r_2^2] - \beta_I^2 + \gamma^2 \} Z_{n+1}(\beta_I r_2)); \\
 a_{6,4} &= -\mu_I ((n/r_2) W'_{n+1}(\beta_I r_2) + \\
 &+ \{ [(n^2 - n - 1)/r_2^2] - \beta_I^2 + \gamma^2 \} W_{n+1}(\beta_I r_2)); \\
 a_{6,5} &= -\mu_I (n\gamma/r_2) Z_n(\beta_I r_2); \\
 a_{6,6} &= -\mu_I (n\gamma/r_2) W_n(\beta_I r_2); \\
 a_{6,7} &= 2\mu_{II} \gamma [Z'_n(\alpha_{II} r_2)]; \\
 a_{6,8} &= 2\mu_{II} \gamma [W'_n(\alpha_{II} r_2)]; \\
 a_{6,9} &= \mu_{II} ((n/r_2) Z'_{n+1}(\beta_{II} r_2) + \\
 &+ \{ [(n^2 - n - 1)/r_2^2] - \beta_{II}^2 + \gamma^2 \} Z_{n+1}(\beta_{II} r_2)); \\
 a_{6,10} &= \mu_{II} ((n/r_2) W'_{n+1}(\beta_{II} r_2) + \\
 &+ \{ [(n^2 - n - 1)/r_2^2] - \beta_{II}^2 + \gamma^2 \} W_{n+1}(\beta_{II} r_2)); \\
 a_{6,11} &= \mu_{II} (n\gamma/r_2) Z_n(\beta_{II} r_2); \\
 a_{6,12} &= \mu_{II} (n\gamma/r_2) W_n(\beta_{II} r_2); \\
 a_{7,1} &= -\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) Z_n(\alpha_I r_1) + 2\mu_I Z_n''(\alpha_I r_1); \\
 a_{7,2} &= -\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) W_n(\alpha_I r_1) + 2\mu_I W_n''(\alpha_I r_1); \\
 a_{7,3} &= 2\mu_I \gamma Z'_{n+1}(\beta_I r_1); \\
 a_{7,4} &= 2\mu_I \gamma W'_{n+1}(\beta_I r_1); \\
 a_{7,5} &= 2\mu_I (n/r_1) [Z'_n(\beta_I r_1) - (1/r_1) Z_n(\beta_I r_1)]; \\
 a_{7,6} &= 2\mu_I (n/r_1) [W'_n(\beta_I r_1) - (1/r_1) W_n(\beta_I r_1)]; \\
 a_{8,1} &= 2\mu_I (n/r_1) [(1/r_1) Z_n(\alpha_I r_1) - Z'_n(\alpha_I r_1)]; \\
 a_{8,2} &= 2\mu_I (n/r_1) [(1/r_1) W_n(\alpha_I r_1) - W'_n(\alpha_I r_1)]; \\
 a_{8,3} &= \mu_I \gamma \{ Z'_{n+1}(\beta_I r_1) - [(n+1)/r_1] Z_{n+1}(\beta_I r_1) \}; \\
 a_{8,4} &= \mu_I \gamma \{ W'_{n+1}(\beta_I r_1) - [(n+1)/r_1] W_{n+1}(\beta_I r_1) \};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{8,5} &= \mu_I \left[\beta_I^2 Z_n(\beta_I r_1) - Z'_n(\beta_I r_1) \right]; \\
 a_{8,6} &= \mu_I \left[\beta_I^2 W_n(\beta_I r_1) - W'_n(\beta_I r_1) \right]; \\
 a_{9,1} &= -2\mu_I \gamma \left[Z'_n(\alpha_I r_1) \right]; \\
 a_{9,2} &= -2\mu_I \gamma \left[W'_n(\alpha_I r_1) \right]; \\
 a_{9,3} &= -\mu_I \left((n/r_1) Z'_{n+1}(\beta_I r_1) + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left[(n^2 - n - 1)/r_1^2 \right] - \beta_I^2 + \gamma^2 \right\} Z_{n+1}(\beta_I r_1) \right); \\
 a_{9,4} &= -\mu_I \left((n/r_1) W'_{n+1}(\beta_I r_1) + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left[(n^2 - n - 1)/r_1^2 \right] - \beta_I^2 + \gamma^2 \right\} W_{n+1}(\beta_I r_1) \right); \\
 a_{9,5} &= \mu_I (n\gamma/r_1) Z_n(\beta_I r_1); \\
 a_{9,6} &= \mu_I (n\gamma/r_1) W_n(\beta_I r_1); \\
 a_{10,7} &= \lambda_{II} (\alpha_{II}^2 + \gamma^2) Z_n(\alpha_{II} r_3) - 2\mu_{II} Z''_n(\alpha_{II} r_3); \\
 a_{10,8} &= \lambda_{II} (\alpha_{II}^2 + \gamma^2) W_n(\alpha_{II} r_3) + 2\mu_{II} W''_n(\alpha_{II} r_3); \\
 a_{10,9} &= -2\mu_{II} \gamma W'_{n+1}(\beta_{II} r_3); \\
 a_{10,10} &= -2\mu_{II} \gamma W'_{n+1}(\beta_{II} r_3); \\
 a_{10,11} &= -2\mu_{II} (n/r_3) \left[Z'_{n+1}(\beta_{II} r_3) - (1/r_3) Z_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right]; \\
 a_{10,12} &= -2\mu_{II} (n/r_3) \left[W'_{n+1}(\beta_{II} r_3) - (1/r_3) W_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right]; \\
 a_{11,7} &= -2\mu_{II} (n/r_3) \left[(1/r_3) Z_n(\alpha_{II} r_3) - Z'_n(\alpha_{II} r_3) \right]; \\
 a_{11,8} &= -2\mu_{II} (n/r_3) \left[(1/r_3) W_n(\alpha_{II} r_3) - W'_n(\alpha_{II} r_3) \right]; \\
 a_{11,9} &= -\mu_{II} \gamma \left\{ Z'_{n+1}(\beta_{II} r_3) - \left[(n+1)/r_3 \right] Z_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right\}; \\
 a_{11,10} &= \mu_{II} \gamma \left\{ W'_{n+1}(\beta_{II} r_3) - \left[(n+1)/r_3 \right] W_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right\}; \\
 a_{11,11} &= \mu_{II} \left[\beta_{II}^2 Z_n(\beta_{II} r_3) - Z'_n(\beta_{II} r_3) \right]; \\
 a_{11,12} &= \mu_{II} \left[\beta_{II}^2 W_n(\beta_{II} r_3) - W'_n(\beta_{II} r_3) \right]; \\
 a_{12,7} &= 2\mu_{II} \gamma \left[Z'_n(\alpha_{II} r_3) \right]; \\
 a_{12,8} &= 2\mu_{II} \gamma \left[W'_n(\alpha_{II} r_3) \right]; \\
 a_{12,9} &= \mu_{II} \left((n/r_3) Z'_{n+1}(\beta_{II} r_3) + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left[(n^2 - n - 1)/r_3^2 \right] - \beta_{II}^2 + \gamma^2 \right\} Z_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right); \\
 a_{12,10} &= \mu_{II} \left((n/r_3) W'_{n+1}(\beta_{II} r_3) + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left[(n^2 - n - 1)/r_3^2 \right] - \beta_{II}^2 + \gamma^2 \right\} W_{n+1}(\beta_{II} r_3) \right); \\
 a_{12,11} &= \mu_{II} (n\gamma/r_3) Z_n(\beta_{II} r_3); \\
 a_{12,12} &= \mu_{II} (n\gamma/r_3) W_n(\beta_{II} r_3).
 \end{aligned}$$

Введем в граничные условия дополнительные слагаемые, моделирующие условия разрыва на границе двух слоев с использованием нормально-го и тангенциального модулей контактных жесткостей $k_{b,n}$ и $k_{b,\tau}$ [5].

Граничные условия (15) примут вид :

$$\begin{aligned}
 U_{rI} - \frac{\sigma_{rrI}}{k_{b,n}} \Big|_{r=r_2} &= U_{rII} \Big|_{r=r_2}; \\
 U_{\theta I} - \frac{\sigma_{r\theta I}}{k_{b,\tau}} \Big|_{r=r_2} &= U_{\theta II} \Big|_{r=r_2}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Изменяются соответствующие коэффициенты определителя:

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} &= Z'_n(\alpha_I r_2) - \\
 &- \frac{-\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) Z_n(\alpha_I r_2) + 2\mu_I Z''_n(\alpha_I r_2)}{k_{b,n}}, \\
 a_{1,2} &= W'_n(\alpha_I r_2) - \\
 &- \frac{-\lambda_I (\alpha_I^2 + \gamma^2) W_n(\alpha_I r_2) + 2\mu_I W''_n(\alpha_I r_2)}{k_{b,\tau}}, \\
 a_{1,3} &= \gamma Z_{n+1}(\beta_I r_2) - \frac{2\mu_I \gamma Z'_{n+1}(\beta_I r_2)}{k_{b,n}}; \\
 a_{1,4} &= \gamma W_{n+1}(\beta_I r_2) - \frac{2\mu_I \gamma W'_{n+1}(\beta_I r_2)}{k_{b,n}}; \\
 a_{2,5} &= -Z'_n(\beta_I r_2) - \\
 &- \frac{\mu_I \left[\beta_I^2 Z_n(\beta_I r_2) - Z'_n(\beta_I r_2) \right]}{k_{b,\tau}}, \\
 a_{2,6} &= -W'_n(\beta_I r_2) - \\
 &- \frac{\mu_I \left[\beta_I^2 W_n(\beta_I r_2) - W'_n(\beta_I r_2) \right]}{k_{b,\tau}}.
 \end{aligned}$$

Рассматривая только осесимметричные колебания ($n=0$), можно существенно упростить выражения для коэффициентов, а коэффициенты дисперсионного уравнения $a_{1,5}$, $a_{1,6}$, $a_{1,11}$, $a_{1,12}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, $a_{2,7}$, $a_{2,8}$, $a_{4,5}$, $a_{4,6}$, $a_{4,11}$, $a_{4,12}$, $a_{5,1}$, $a_{5,2}$, $a_{5,7}$, $a_{5,8}$, $a_{6,5}$, $a_{6,6}$, $a_{6,11}$, $a_{6,12}$, $a_{7,5}$, $a_{7,6}$, $a_{8,1}$, $a_{8,2}$, $a_{9,5}$, $a_{9,6}$, $a_{10,11}$, $a_{10,12}$, $a_{11,7}$, $a_{11,8}$, $a_{12,11}$, $a_{12,12}$ обратятся в ноль.

В результате получим определитель вида

$$\begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 0 & 0 & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & 0 & 0 & a_{2,9} & a_{2,10} & a_{2,11} & a_{2,12} \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 & a_{3,7} & a_{3,8} & a_{3,9} & a_{3,10} & 0 & 0 \\
 a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} & a_{4,10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 & 0 & a_{5,9} & a_{5,10} & a_{5,11} & a_{5,12} \\
 a_{6,1} & a_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{8,3} & a_{8,4} & a_{8,5} & a_{8,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{9,1} & a_{9,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,9} & a_{11,10} & a_{11,11} & a_{11,12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,7} & a_{12,8} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Переставив строки и столбцы, приведем определитель к блочно-диагонализированному виду:

$$\begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,7} & a_{3,8} & a_{3,9} & a_{3,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} & a_{4,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{6,1} & a_{6,2} & 0 & 0 & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{9,1} & a_{9,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,7} & a_{12,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{8,3} & a_{8,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,5} & a_{8,6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & 0 & a_{5,9} & a_{5,10} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,11} & a_{5,12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,9} & a_{11,10} & 0 & 0 & a_{11,11} & a_{11,12} \\
 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & a_{2,9} & a_{2,10} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,11} & a_{2,12}
 \end{vmatrix}$$

Благодаря такому представлению исходный определитель можно записать в виде произведения определителей восьмого порядка R и четвертого порядка T :

$$|a_{i,j}| = |R_{l,m}| |T_{p,q}|, \quad (24)$$

где $l, m = \overline{1, 8}$; $p, q = \overline{1, 4}$.

Тогда дисперсионное уравнение для двухслойной трубы, как и в случае со стержнем и однородной трубой, распадается на два:

$$|R_{l,m}| = 0; \quad |T_{p,q}| = 0. \quad (25)$$

Уравнения (25) могут быть представлены в виде:

$$|R_{l,m}| = \begin{vmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,7} & a_{3,8} & a_{3,9} & a_{3,10} \\
 a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} & a_{4,10} \\
 a_{6,1} & a_{6,2} & 0 & 0 & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 \\
 a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{9,1} & a_{9,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,7} & a_{12,8} & 0 & 0
 \end{vmatrix} = 0; \quad (26)$$

$$|T_{p,q}| = \begin{vmatrix}
 a_{8,5} & a_{8,6} & 0 & 0 \\
 a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,11} & a_{5,12} \\
 0 & 0 & a_{11,11} & a_{11,12} \\
 a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,11} & a_{2,12}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим каждое уравнение по отдельности. В определителе (26) выделим подопределители:

$$|R_1| = \begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & 0 & 0 \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} \\ a_{9,1} & a_{9,2} & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$|R_2| = \begin{vmatrix} a_{4,7} & a_{4,8} & a_{4,9} & a_{4,10} \\ a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 \\ a_{10,7} & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} \\ a_{12,7} & a_{12,8} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из анализа этих определителей и сравнения с ранее полученными результатами [17] видно, что выражения $|R_1| = 0$ и $|R_2| = 0$ являются дисперсионными уравнениями для симметричных волн во внутренней и в наружной трубах соответственно..

Аналогичным образом выделим подопределители в системе (27):

$$|D_1| = \begin{vmatrix} a_{8,5} & a_{8,6} \\ a_{5,5} & a_{5,6} \end{vmatrix}; \quad (28)$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{5,11} & a_{5,12} \\ a_{11,11} & a_{11,12} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

а $|D_1| = 0$ и $|D_2| = 0$ – дисперсионные уравнения, описывающие крутильные волны во внутренней и в наружной трубах соответственно.

Таким образом, из (24) следует, что внутри двухслойной трубы симметричные и крутильные моды разделяются, аналогично тому, как это происходит в однородной трубе или в двухслойном стержне [18]. Причем как крутильные, так и симметричные моды двухслойной трубы являются результатом взаимодействия только крутильных и только симметричных мод в составляющих ее трубах соответственно.

Если положить один из коэффициентов Ламе μ_I или μ_{II} равным нулю, что соответствует условию отсутствия одной из составляющих вол-

новод труб, то (27) перейдет в выражение (28) или (29) соответственно, т. е. сведется к дисперсионному уравнению однородной трубы.

Математическое моделирование. Дальнейший анализ проведен по результатам численного решения уравнения без учета адгезии между слоями для двухслойной трубы с внешним диаметром 60 мм, толщиной стенок внешней и внутренней труб 5 мм. Внешняя труба изготовлена из стали 30Л ($\mu_I = 74 \cdot 10^9$ Па, $\rho_I = 7700$ кг/м³), внутренняя – из стали X12 ($\mu_{II} = 86 \cdot 10^9$ Па, $\rho_{II} = 7810$ кг/м³).

Для упрощения расчетов перейдем к относительным величинам сделав следующие замены:

$$\beta_I^2 = \frac{\omega^2}{c_{tI}^2} - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_{tI}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{c_{tI}^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{(k_t d)^2}{d^2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right);$$

$$\beta_{II}^2 = \frac{\omega^2}{c_{tII}^2} - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_{tII}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} =$$

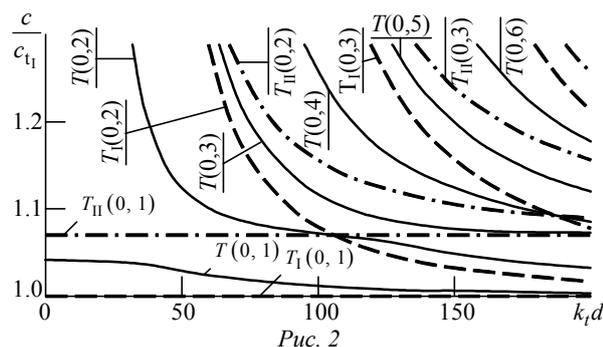
$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{c_{tII}^2}{c^2} \frac{c_{tI}^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{(k_t d)^2}{d^2} \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right),$$

где $x = c/c_{tI}$; $y = c_{tII}/c_{tI}$; $k_t d = (\omega/c)d$; $d \geq r_3$.

Результаты численного расчета представлены на рис. 2. Как и в случае с композиционным стержнем [18], изменения дисперсионных кривых по сравнению с однородной трубой носят не только количественный, но и качественный характер. Видно, что первая мода $T(0, 1)$ бездисперсионна в однородных трубах, однако в случае двухслойной трубы связанная мода обладает заметной дисперсией. Также заметно появление мод в области меньших волновых размеров и существенное изменение характера дисперсионных кривых для мод более высокого порядка, связанное с взаимодействием мод внешней и внутренней труб.

Рассчитанные дисперсионные кривые совпадают с кривыми, которые можно получить при помощи программы GUIGUW [17], что подтверждает адекватность представленной модели.

Более полный анализ распространения крутильных волн в двухслойной трубе может быть получен с учетом адгезии между слоями введением в граничные условия дополнительных слагаемых (см. (22) и (23)). Из дисперсионного уравнения (27) следует, что при рассмотрении крутиль-



ных колебаний можно ограничиться введением только коэффициента $k_{b,\tau}$, отвечающего за тангенциальную жесткость. Согласно [20] этот коэффициент определяется как

$$k_{b,\tau} = \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_I c_{tI} + \mu_{II} c_{tII}} \cdot \frac{2\pi(1-\xi)}{\omega w^2 \xi},$$

где ξ – коэффициент перфорации, определяющий степень сплошности границы; w – пространственный период эквивалентной упорядоченной периодической структуры, модели контакта. При этом условии $\xi \rightarrow 0$ ($k_{b,\tau} \rightarrow 0$) соответствует модели свободной границы, а $\xi \rightarrow 1$ ($k_{b,\tau} \rightarrow \infty$) – сварного контакта.

На рис. 3 представлены результаты численного расчета дисперсионного уравнения с учетом жесткости контакта для различных коэффициентов перфорации (0, 0.25, 0.6, 0.99). Можно видеть, что при отсутствии контакта решение представляет

собой совокупность крутильных волн в однородных трубах. При увеличении адгезии дисперсионные кривые становятся связанными, что приводит к качественным изменениям в поведении кривых. Мода $T(0, 1)$ для обеих труб с увеличением ξ становится дисперсионной, в то время как моды более высоких порядков сливаются и порождают связанные колебания в двухслойной трубе.

Рассмотрим также решение дисперсионного уравнения для однородной трубы из стали 30Л, имеющей расслоение с нежестким контактом на глубину, равную половине толщины стенки. В качестве модели для такого объекта используем двухслойную трубу с одинаковыми коэффициентами $\mu_I = \mu_{II} = 74 \cdot 10^9$ Па и плотностями $\rho_I = \rho_{II} = 7700$ кг/м³. В качестве примера на рис. 4 представлено численное решение такой задачи при $\xi = 1$ (нет дефекта) и $\xi = 0.5$.

Можно отметить, что мода $T(0, 1)$ остается

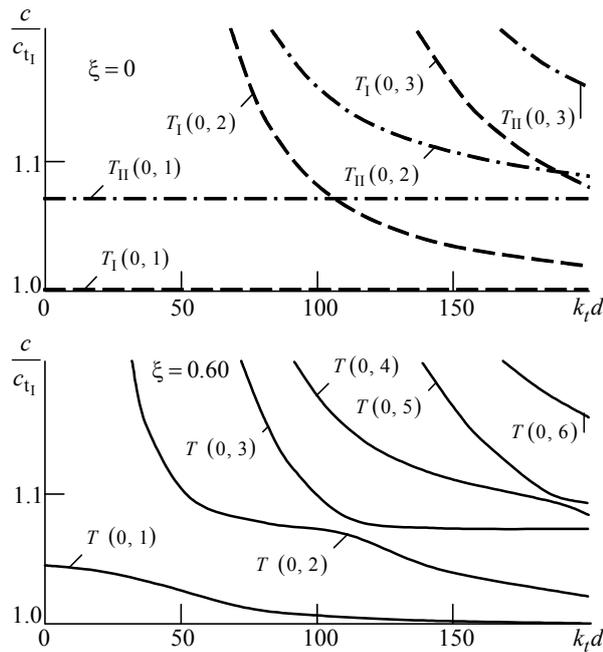


Рис. 3

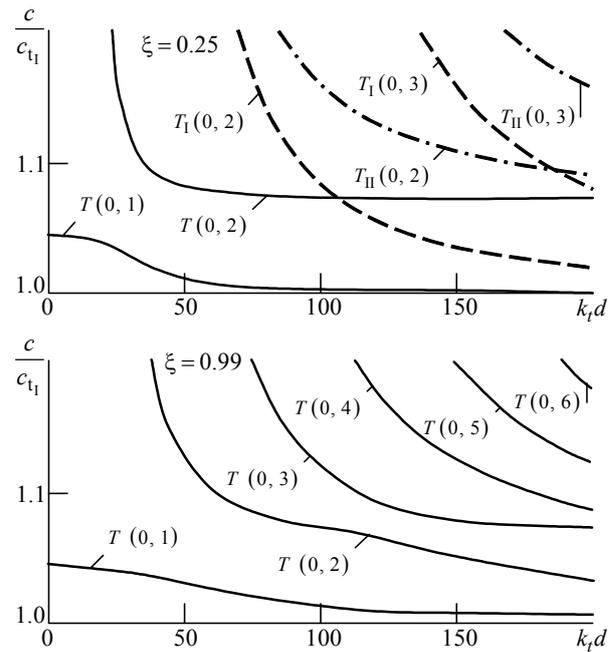
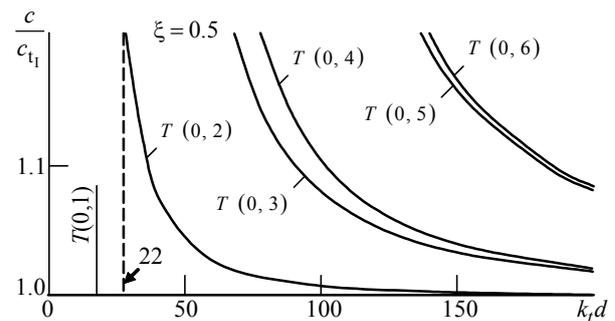
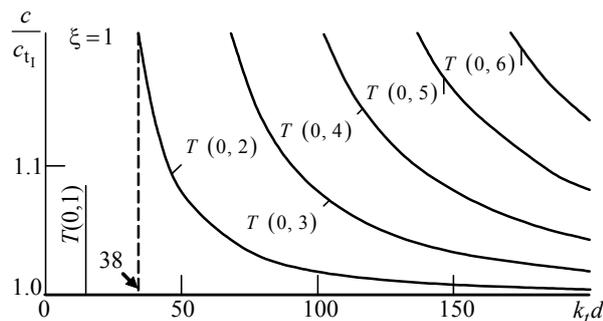


Рис. 4



бездисперсионной при изменении коэффициента перфорации, однако частоты появления мод более высоких порядков смещаются к частотам, соответствующим внешней и внутренней трубам. В том числе первая дисперсионная мода $T(0, 2)$ появляется на более низких частотах.

Заключение. Из изложенного следует, что характер распространения крутильных мод в двух-

слойной трубе имеет ряд особенностей в сравнении с распространением в однородной трубе. Учет этих особенностей может как повысить надежность выявления дефектов при контроле крутильными волнами, так и стать основой для формирования новых информативных параметров при выявлении расслоений в однородных и составных трубах из различных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Взаимодействие крутильных волн с дефектами насосно-компрессорных труб, обусловленными प्रतिрами и разностенностью / Г. А. Буденков, О. В. Недзвецкая, С. А. Мурашов, А. А. Короткова // Приборостроение в XXI веке. Интеграция науки, образования и производства: тр. науч.-техн. конф., Ижевск, 14–15 апр. 2006 г. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2006. С. 81–89.
2. Взаимодействие крутильных волн с продольными трещинами труб / Г. А. Буденков, О. В. Недзвецкая, Д. В. Злобин, С. А. Мурашов // Дефектоскопия. 2006. № 6. С. 57–66.
3. Буденков Г. А., Недзвецкая О. В., Далати М. О. Возможностях акустической дистанционной дефектоскопии протяженных объектов // Дефектоскопия. 2003. № 11. С. 30–33.
4. Мурашов С. А., Коробейникова О. В. Основные параметры акустического контроля протяженных объектов различного профиля с использованием крутильных волн // Вестн. Ижевского гос. техн. ун-та. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. № 2(46). С. 84–88.
5. Rapid, Long-Range Inspection of Chemical Plant Pipework Using Guided Waves / D. Alleyne, B. Pavlacovic, M. Lowe, P. Cawley // Insight . 2001. № 43. P. 93–96, 101.
6. Alleyne D., Lowe M., Cawley P. The Reflection of Guided Waves from Circumferential Notches in Pipes // J. of Applied Mechanics. 1998. № 65. P. 635–641.
7. Practical Long Range Guided Wave Testing: Applications to Pipes and Rails / P. Cawley, M. J. S. Lowe, D. H. Alleyne, B. Pavlacovic, P. Wilcox // Materials Evaluation. 2003. № 61 (1). P. 66–74.
8. Cui L., Liu Y., Soh C. K. Torsional- Guided Waves for Monitoring Cylindrical Structures Using Piezoelectric Macro-Fiber Composite // Health Monitoring of Structural and Biological Systems. Las Vegas, United States, 6–10 March 2011. SPIE. 2011. Vol. 7984. P. 798401–798409.
9. The Reflections of the Fundamental Torsional Mode from Cracks and Notches in Pipes / A. Demma, P. Gawley, M. Lowe, A. G. Roosenbrand // The J. of the Acoustical Society of America. 2003. №114(2). P. 611–625;
10. Ditri J. Utilization of Guided Elastic Waves for the Characterization of Circumferential Cracks in Hollow Cylinders // The J. of the Acoustical Society of America. 1994. № 96. P. 3769–3775.
11. Hayashi T., Rose J. L. Guided Wave Simulation and Visualization by a Semianalytical Finite Element Method // Materials Evaluation. 2003. № 61 (1). P. 75–79.
12. Hua J., Rose J. L. Guided Wave Inspection Penetration Power in Viscoelastic Coated Pipes // Insight. 2010. 52 (4). P. 195–205.
13. Ratssepp M., Fletcher S., Lowe M. J. S. Scattering of the fundamental torsional mode at an axial crack in a pipe// The J. of the Acoustical Society of America. 2010. № 127. P. 730–740.
14. Velichko A., Wilcox P. D. Excitation and scattering of guided waves: Relationships between solutions for plates and pipes// The J. of the Acoustical Society of America. 2009. № 125. P. 3623–3631.
15. Barshinger J. N., Rose J. L. Guided wave propagation in anelastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material.// IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency. 2004. Vol. 51, № 11. P. 1547–1556.
16. Bocchini P., Marzani A., Viola E. Graphical user interface for guided acoustic waves // J. of Computing in Civil Engineering . 2011. № 25(3). P. 202–210.
17. Gazis D. C. Three Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders // The J. of the Acoustical Society of America. 1959. № 31. P. 568–578.
18. Каплан М. Д., Веремеенко С. В. Распространение нормальных волн в композиционном (двуслойном) стержне // Дефектоскопия. 1987. № 12. С. 78–87.
19. Gan W. S, Gauge invariance Approach to Acoustic Fields // Acoustical Imaging; ed. Iwaki Akiyama. 2007. Vol. 29. P. 389–394.
20. Аббакумов К. Е. Отражение и прохождение упругих волн на плоской границе с нарушенной адгезией твердых сред // Неразрушающий контроль и диагностика: тез. докл. 15-й Рос. науч.-техн. конф., М., 28 июня – 2 июля 1999 г. М.: РОНКТД, 1999. С. 334.

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2018 г.

Аббакумов Константин Евгеньевич – доктор технических наук (2000), профессор (2001), заведующий кафедрой электроакустики и ультразвуковой техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – неразрушающий контроль, акустика, техническая диагностика.
E-mail: KEAbbakumov@etu.ru

Степаненко Николай Вадимович – магистр техники и технологии по направлению "Приборостроение" (2009), ассистент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор трех научных публикаций. Сфера научных интересов – неразрушающий контроль, акустика, техническая диагностика.
E-mail: NVStepanenko@etu.ru

REFERENCES

1. Budenkov G.A., Nedzveckaja O.V., Murashov S.A., Korotkova A.A. *Vzaimodejstvie krutil'nyh voln s defektami nasosno-kompressornyh trub, obuslovlennymi protirami i raznostennost'ju* [Torsional Wave Interaction with Pipe Defects Caused by Wipes and Difference in Wall Thickness]. *Priborostroeniye XXI veke. Integracija nauki, obrazovaniya i proizvodstva* [Instrument Engineering in the XXI century. Integration of Science, Education and Production] Izhevsk, *Izh-GTU Publ.* 2006, pp. 81–89 (In Russian)
2. Budenkov G. A., Nedzveckaya O. V., Zlobin D. V., Murashov S. A. Interaction of Torsion Waves with Longitudinal Cracks in Tubes. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2006, no. 6, pp. 392–397.
3. Budenkov G. A., Nedzveckaya O. V., Dalati M. On Possibilities of Acoustic Remote Nondestructive Testing of Long Objects. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2003, no. 11, pp. 833–836.
4. Murashov, S. A., Korobejnikova O. V. Basic Parameters of Acoustic Testing of Extended Objects of Various Profiles Using Torsional Waves. *Vestnik Izhhevskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta* [Bulletin IzhSTU]. 2010, no. 2(46), pp. 84–88. (In Russian)
5. Alleyne D., Pavlacovic B., Lowe M., Cawley P. Rapid, Long-Range Inspection of Chemical Plant Pipework Using Guided Waves. *Insight*. 2001, no. 43, pp. 93–96, 101.
6. Alleyne D., Lowe M., Cawley P. The Reflection of Guided Waves from Circumferential Notches in Pipes. *Journal of Applied Mechanics*. 1998, no. 65, pp. 635–641.
7. Cawley P., Lowe M. J. S., Alleyne D.H., Pavlacovic B., P. Wilcox. Practical Long Range Guided Wave Testing: Applications to Pipes and Rails. *Materials Evaluation*. 2003, no. 61 (1), pp. 66–74.
8. Cui L., Liu Y., Soh C. K. Torsional- Guided Waves for Monitoring Cylindrical Structures Using Piezoelectric Macro-Fiber Composite. *Health Monitoring of Structural and Biological Systems*. Las Vegas, United States. 6–10 March 2011. SPIE. 2011, vol. 7984, pp. 798401–798409.
9. Demma A., Gawley P., Lowe M., Roosenbrand A. G. The Reflections of the Fundamental Torsional: Mode from Cracks and Notches in Pipes. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2003, no. 114(2), pp. 611–625.
10. Ditri J. Utilization of Guided Elastic Waves for the Characterization of Circumferential Cracks in Hollow Cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1994, no. 96, pp. 3769–3775.
11. Hayashi T., Rose J. L. Guided Wave Simulation and Visualization by a Semianalytical Finite Element Method. *Materials Evaluation*. 2003, no. 61 (1), pp. 75–79.
12. Hua J, Rose J. L. Guided Wave Inspection Penetration Power in Viscoelastic Coated Pipes. *Insight*. 2010, 52 (4), pp. 195–205.
13. Ratasseppe M., Fletcher S., Lowe M. J. S. Scattering of the Fundamental Torsional Mode at an Axial Crack in a Pipe. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2010, no. 127, pp. 730–740
14. Velichko A., Wilcox P. D. Excitation and Scattering of Guided Waves: Relationships between Solutions for Plates and Pipes. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2009, no. 125, pp. 3623–3631.
15. Barshinger J. N., Rose J. L. Guided Wave Propagation in Anelastic Hollow Cylinder Coated With A Viscoelastic Material. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency*. 2004, vol. 51, no. 11, pp. 1547–1556.
16. Bocchini P., Marzani A., Viola E. Graphical user interface for guided acoustic waves. *Journal of Computing in Civil Engineering*. 2011, no. 25(3), pp. 202–210.
17. Gazis, D. C. Three dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders// *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1959, no. 31, pp. 568–578.
18. Kaplan M. D. Veremeenko S.V. Normal Wave Propagation in a Composite (Two-Layer) Rod. *Defektoskopiya, [Flaw detection]*. 1987, no. 12, pp. 78–87. (In Russian)
19. Gan W. S. Gauge invariance Approach to Acoustic Fields. *Acoustical Imaging*; ed. Iwaki Akiyama. 2007, vol. 29, pp. 389–394.
20. Abbakumov K. E. *Otazhenie i prohozhdenie uprugih voln na ploskoj granice s narushennoj adgezijей tverdyh sred* [Elastic Wave Reflection and Passage on Flat Boundary with Broken Adhesion of Solid Media] *Nerazrushajushhij kontrol' i diagnostika: Tez. dokl. 15-j Ros. nauch.-tehn. konf.* [Non-Destructive Testing and Diagnostics. Proc. of the 15th Russian scientific and technical conf.]. Moscow, 28 June- 2 July 1999, 334 p. (In Russian)

Received September, 21, 2018

Konstantin E. Abbakumov – D.Sc. in Engineering(2000), Professor (2001), Head of the Department of Electroacoustics and Ultrasonic Engineering of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: non-destructive testing; acoustics; technical diagnostics.
E-mail: KEAbbakumov@etu.ru

Nikolay V. Stepanenko – Master's Degree in Instrument Engineering (2009), assistant of the Department of Electroacoustics and Ultrasonic Engineering of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of 3 scientific publications. Area of expertise: non-destructive testing; acoustics; technical diagnostics.
E-mail: NVStepanenko@etu.ru