DOI: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-5-12

УДК 621.3.001

А. Г. Дерипаска
Концерн "Океанприбор"
Чкаловский пр., д. 46, Санкт-Петербург, 197136, Россия
М. В. Соклакова, Э. П. Чернышев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)
ул. Профессора Попова, д. 5, Санкт-Петербург, 197376, Россия

К разработке новых методов аналитической оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях

Аннотация. *Статья посвящена развитию метода исследования устойчивости автоколебаний, описанных аналитически. Рассмотрен случай, когда линейная часть системы содержит передаточную функцию, имеющую нулевой полюс. Исследование передаточной функции, степень числителя которой на два порядка меньше степени знаменателя, обычно не представляет трудности. Авторами ранее исследованы более сложные передаточные функции в виде идеального интегратора и апериодического звена, а также случай, когда степени числителя и знаменателя передаточной функции одинаковы. Однако наличие нулевого полюса является особым случаем, подлежащим исследованию.*

Дана сравнительная оценка результатов аналитического расчета автоколебаний и анализа устойчивости методами, разработанными для симметричных автоколебаний с повторениями через полпериода и несимметричных с повторениями через период.

Разработанный метод является существенно новым научным шагом в разработке методов расчета нелинейных систем. Он позволяет оценивать важную для прецизионных систем точность приближенных методов расчета. Метод относительно прост в реализации; позволяет получить решение, в том числе и в случаях, до сих пор не поддававшихся анализу приближенными методами, когда импульсная характеристика является разрывной функцией и даже содержит функцию Дирака.

Ключевые слова: автоколебания, устойчивость, релейная система, передаточная функция, дискретная цепь, импульсная характеристика, переходная характеристика

Для цитирования: Дерипаска А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. К разработке новых методов аналитической оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 4. С. 5–12. doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-5-12

Alina G. Deripaska
Concern "Oceanpribor"
46, Chkalovsky pr., 197136, St. Petersburg, Russia
Marina V. Soklakova, Eduard P. Chernishev
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5, Professor Popov Str., 197376, St. Petersburg, Russia

Development of New Methods for Analytical Estimation of Self-Oscillation Stability in Relay Circuits

Abstract. *This article is devoted to the development of analytically described self-oscillation stability research technique. The case when the linear part of the system contains transfer function with a zero pole is considered. Typically the transfer function study, where the numerator degree is two orders of magnitude less than the denominator degree is creates no problems. However, the presence of a zero pole makes the case special and requires investigation.*

A comparative evaluation of the results of self-oscillation analytical calculation and stability analysis is given, by means of technique developed for symmetric self-oscillations with half-period repetitions and asymmetric ones with period repetitions.

The presented technique is a significantly new scientific step in the development of methods for calculating non-linear systems. It also allows us to evaluate the accuracy of approximate calculation methods, which is important for precision systems. The technique is relatively easy to implement. It allows to find a solution as well as for the cases having been unanalyzable so far.

Key words: self-oscillation, stability, relay system, transfer function, discrete circuit, pulse characteristic, transient characteristic

For citation: Deripaska A. G., Soklakova M. V., Chernishev E. P. Development of New Methods for Analytical Estimation of Self-Oscillation Stability in Relay Circuits. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2018, no. 4, pp. 5–12. doi:10.32603/1993-8985-2018-21-4-5-12 (In Russian)

Введение. Релейные автоколебательные системы получили широкое распространение в различных областях техники (в частности, измерительной, приборостроительной, навигационной) из-за высокого быстродействия, простоты и относительной дешевизны реализации. В то же время они являются типичными представителями нелинейных систем, которые до сих пор рассчитывались в основном приближенными методами [1], в частности методом гармонической линеаризации и аналитически-численным методом [2]. Некоторые приближенные методы не позволяют проанализировать автоколебания [3], например в случае линейной части в виде идеального интегратора или фильтра нижних частот первого порядка и в теоретически важных случаях, когда степени числителя и знаменателя передаточной функции линейной части одинаковы [4].

Постановка задачи. Авторами [4], [5] предложен простой метод анализа устойчивости симметричных автоколебаний в релейных цепях, базирующийся на применении теории дискретных цепей. Метод был разработан вначале для случая передаточной функции линейной части релейной цепи

$$H(s) = -k\frac{B(s)}{D(s)} = -k\frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}, \quad (1)$$

когда $n \ge m+2$, т. е. в (1) степень полинома знаменателя $D(s)$ минимум на 2 больше степени полинома числителя $B(s)$ (s – аргумент преобразования Лапласа; k – постоянный коэффициент). В последующих работах авторов это ограничение было устранено [6].

В настоящей статье указанный метод распространен на случай несимметричных автоколебаний в релейной цепи [7], [8].

Справедливость принятых решений может быть проверена их применением в условиях, для которых имеются решения, полученные ранее известными методами [9]. Поскольку симметричные автоколебания являются частным случаем несимметричных, в настоящей статье расчеты новым методом проведены для симметричных автоколебаний и проведено сравнение полученных результатов с данными известного метода, описанного в [4], [5].

Исходные данные. В качестве примера рассмотрим релейную цепь с релейным элементом, имеющим симметричную нормированную петлю гистерезиса:

$$y(t) = c\,\mathrm{sgn}\left[x(t) - d\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}\left(t^-\right)\right], \quad (2)$$

где $y(t)$, $x(t)$ – выходная и входная переменные релейного элемента соответственно; c, d – высота и полуширина петли гистерезиса соответственно (в дальнейшем петля гистерезиса предполагается нормированной, т. е. $c = d = 1$);

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \begin{cases} -1, \tau < 0; \\ 0, \ \tau = 0; \\ 1, \ \tau > 0 \end{cases}$$

– переключательная функция идеального релейного элемента; $\dot{x}\left(t^-\right)$ – скорость изменения входной переменной в момент, непосредственно предшествующий моменту t переключения релейного элемента.

Отрицательная обратная связь линейной части в релейной цепи описывается передаточной функцией вида (1):

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{-k}{s(s+1)}. \quad (3)$$

Таким образом, (3) описывает обычно имеющийся в релейной цепи интегратор и фильтр нижних частот с нормированными к единице передаточной функцией и постоянной времени.

В результате единственным изменяющимся обобщенным параметром в такой нормированной релейной цепи (3) является статический коэффициент k, что очень удобно для понимания проводимого исследования.

В качестве критерия устойчивости автоколебаний в релейной цепи аналогично [5], [10] выбран критерий устойчивости по Ляпунову, определяемый уравнением

$$\left|x_\xi(0)\right| < \alpha \to \left|x_\xi(t)\right| < \beta(\alpha),\ t \to \infty\,, \qquad (4)$$

где $x_\xi = x - \tilde{x}$ – приращение входного сигнала линейной части системы x, вызванное внесением бесконечно малого возмущения $\tilde{x}$, возникшей вследствие некоторой причины; α, β – бесконечно малые. Уравнение (4) описывает свойство устойчивой системы: если в системе возникает (бесконечно) малое возмущение $\left|x_\xi(0)\right| < \alpha$, то по истечении некоторого, вообще говоря неопределенного, промежутка времени $(t \to \infty)$ оно не будет превосходить (бесконечно) малой величины β, зависящей от α.

Основная идея. Анализ установившихся автоколебаний в симметричных релейных цепях [4], [5] базируется на описании симметричных автоколебаний в форме

$$x(t) = -x(t \pm \tau);\ \ y(t) = -y(t \pm \tau), \qquad (5)$$

где $\tau = T/2$ – полупериод автоколебаний.

Таким образом, автоколебания считаются устойчивыми, если за время полупериода τ изменения их амплитуды $\left|x_\xi(t)\right|$ отвечают критерию устойчивости по Ляпунову (4), и неустойчивыми – в обратном случае[1].

В случае простых несимметричных автоколебаний их описание [7], [8] в сравнении с (5) изменится:

$$x(t) = x(t \pm T);\ \ y(t) = y(t \pm T),$$

т. е. здесь не предполагается симметрия на полупериоде $T/2$, как это было в (5). Тогда очевидно считать устойчивыми автоколебания, если за период T изменения амплитуды автоколебаний $\left|x_\xi(t)\right|$ отвечают критерию устойчивости по Ляпунову (4), иначе – неустойчивыми.

Расчет автоколебания в исходной цепи. Используем аналитическую методику, описанную в [4], [5].

Допустим, что переключение релейного элемента произошло в момент времени $t = 0$. Тогда образ по Лапласу первого полупериода автоколебаний на выходе релейного элемента описывается как

$$Y_1(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s\tau}\right),\ \ 0 < t < \tau.$$

[1] В настоящей статье рассматриваются простые автоколебания, когда внутри полупериода нет переключений релейного элемента.

Полное описание образа сигнала на выходе релейного элемента (по формуле геометрической прогрессии):

$$Y(s) = \frac{Y_1(s)}{1 + e^{-s\tau}} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s\left(1 + e^{-s\tau}\right)}. \qquad (6)$$

Тогда образ сигнала на выходе линейной части:

$$X(s) = Y(s)H(s) = \frac{\left(1 - e^{-s\tau}\right)}{s\left(1 + e^{-s\tau}\right)} \frac{-k}{s(s+1)} =$$
$$= X_{\text{св}}(s) + X_{\text{вын}}(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{X_1(s)}{1 + e^{-s\tau}}, \qquad (7)$$

где

$$X_{\text{св}}(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}$$

– изображение свободной составляющей решения (A_1, A_2 – коэффициенты);

$$X_{\text{вын}}(s) = \frac{X_1(s)}{1 + e^{-s\tau}}$$

– изображение вынужденной составляющей решения, записанное аналогично (6) в виде суммы убывающей геометрической прогрессии ($X_1(s)$ – изображение искомого первого после произвольно выбранного нулевого момента времени полупериода автоколебаний на выходе линейной части).

Определим коэффициенты свободной составляющей:

$$A_1 = \frac{d}{ds}\left[s^2 X(s)\right]_{s=0} =$$
$$= \frac{d}{ds}\left[\frac{-k\left(1 - e^{-s\tau}\right)}{\left(1 + e^{-s\tau}\right)(s+1)}\right] = -\frac{k\tau}{2}; \qquad (8)$$

$$A_2 = (s+1)\left[X(s)\right]_{s=-1} = \frac{-k\left(1 - e^{\tau}\right)}{1 + e^{\tau}}. \qquad (9)$$

Из (7)–(9) найдем описание полупериода установившихся автоколебаний в интервале $0 < t < \tau$:

$$X_1(s) = \frac{H(s)}{s} - X_{\text{св}}(s) =$$
$$= \frac{-k}{s^2(s+1)} - \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}\right) =$$
$$= -k\left(\frac{B_0}{s^2} + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s+1}\right) - \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}\right),$$

где B_0, B_1, B_2 – коэффициенты разложения на простые составляющие изображения по Лапласу переходной характеристики (первого слагаемого).

Возвратившись к оригиналу сигнала, получим:

$$x_1(t) = h_1(t) - x_{\text{св}}(t) = \\ = -k\left[t - 1 + e^{-t}\right] - \left[-k\tau/2 + A_2 e^{-t}\right], \quad (10)$$

где

$$h_1(t) = -k\left(t - 1 + e^{-t}\right)\delta_1(t) \Leftrightarrow H(s)/s = H_1(s) \quad (11)$$

– переходная характеристика линейной части для $t > 0$ ($\delta_1(t)$ – единичная ступенчатая функция [11]).

Переходной характеристике (11) соответствует импульсная характеристика линейной части

$$h(t) = h_1'(t) = -k\left[1 - e^{-t}\right]\delta_1(t) \Leftrightarrow H(s).$$

Для последующих расчетов необходимо знать скорость изменения $\dot{x}_0 = \dot{x}\left(0^-\right)$ в момент, предшествующий первому после условного начального момента времени переключению релейного элемента.

При $m \le n - 2$ из (1) и (3) следует, что сигнал на входе релейного элемента и производная этого сигнала непрерывны:

$$x\left(0^-\right) = x\left(0^+\right); \;\; \dot{x}_0 = \dot{x}\left(0^-\right) = \dot{x}\left(0^+\right).$$

Требование $m \le n - 2$ является ограничением рассматриваемого метода.

Из (10) найдем

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) = -k\left(1 - e^{-t}\right) + A_2 e^{-t}.$$

Следовательно, скорость изменения $\dot{x}(t)$ в момент переключения $t = 0$ составляет

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1\left(0^-\right) = \dot{x}_1\left(0^+\right) = A_2 = -k\left(1 - e^{\tau}\right)/\left(1 + e^{\tau}\right), \quad (12)$$

т. е. $\dot{x}_0$ зависит от длительности полупериода автоколебаний τ.

Для определения τ учтем, что в момент условного первого переключения при $t = 0$ согласно (2) имеем $x(0) = d = 1$. Тогда на основании (10):

$$x_1(0) = \frac{k\tau}{2} - A_2 = \frac{k\tau}{2} + k\frac{1 - e^{\tau}}{1 + e^{\tau}} = 1, \quad (13)$$

т. е. согласно (13) необходимо решить уравнение

$$\tau/2 + \left(1 - e^{\tau}\right)/\left(1 + e^{\tau}\right) - 1/k = 0.$$

На основе этого уравнения легко решается обратная задача: определение k по заданному τ. Например, задавшись $\tau \cong 2$, получим:

$$\frac{1}{k} = 1 + \frac{1 - e^2}{1 + e^2} \cong 1 + \frac{1 - 7}{1 + 7} = \frac{1}{4}, \text{ т. е. } k \cong 4.$$

Оценка устойчивости автоколебаний методом анализа их полупериода. Пусть входная переменная релейной части является "исчезающе малым" по площади воздействием [10] вида δ-функции:

$$x(t) = \beta_0 \delta(t + \Delta t), \;\; \Delta t \to 0. \quad (14)$$

В результате этого воздействия происходит преждевременное на $\Delta t \to 0$ срабатывание релейного элемента. Возмущенный сигнал $\tilde{y}(t)$ будет опережать сигнал $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$ (6) на выходе релейного элемента на Δt [12]. Вариация этого сигнала $y_\xi(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ будет представлять собой короткие знакочередующиеся прямоугольные импульсы, которые приближенно можно описать δ-функциями [11], действующими в моменты $t = n\tau$:

$$y_\xi(n\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2\Delta t_n \delta_0(n\tau), \quad (15)$$

где коэффициент "2" обусловлен переключением релейного элемента с уровня "–1" к уровню "+1" [13]. Замена имевшейся в (14) δ-функции $\delta(t)$ на дискретную δ-функцию $\delta_0(n\tau)$ в (15) не искажает картину реакции релейной цепи на возмущающее воздействие.

При $n \ge 1$ величина смещения импульса Δt_n зависит от вариации $x_\xi(n\tau)$ в моменты переключения:

$$\left|\Delta t_n\right| = \left|x_\xi(n\tau)\right| / \dot{x}_0. \quad (16)$$

Здесь скорость изменения входного сигнала релейного элемента $\dot{x}_0$ в моменты переключения предполагается неизменной, что является допущением представленного метода. Такой подход учитывает только первые члены разложения переменных в ряд Тейлора [14].

С учетом (14)–(16) перейдем к описанию исследуемых процессов эквивалентными уравнениями дискретной цепи:

$$Y_\xi(z) = 2\left[\beta_0 + X_\xi(z)\right]\dot{x}_0^{-1}; \\ X_\xi(z) = H(z) Y_\xi(z). \quad (17)$$

Уравнения (17) являются z-преобразованием [11] уравнений (15) и (3) для дискретных моментов времени $t = n\tau$. Знакопеременный множитель $(-1)^n$ из (15) учтен в (17) как знак x_ξ (16).

Из (17) следует, что передаточная функция дискретной цепи может быть получена по передаточной функции исходной аналоговой релейной цепи методом соответствия их импульсных характеристик:

$$H(z) \div h(nT) = h(t), \; t = n\tau. \quad (18)$$

Таким образом, сугубо нелинейная релейная цепь при анализе устойчивости автоколебаний описывается системой линейных уравнений (17), (18), решение которых очевидно.

Преобразуем (17):

$$X_\xi(z) = H(z)\left[\beta_0 + X_\xi(z)\right]2\dot{x}_0^{-1} \quad (19)$$

и по (19) найдем передаточную функцию замкнутой дискретной цепи $H_з(z)$:

$$\frac{X_\xi(z)}{\beta_0} = H_з(z) = \frac{2\dot{x}_0^{-1}H(z)}{1 - 2\dot{x}_0^{-1}H(z)}. \quad (20)$$

Знаменатель передаточной функции (20) определяет характеристический полином дискретной цепи [11]:

$$P(z) = \dot{x}_0/2 - H(z) = 0. \quad (21)$$

В предположении некратных корней z_i полинома $P(z)$ получим при разложении (20) согласно [11]:

$$X_\xi(z) = \sum \frac{D_i z}{z - z_i}\beta_0 \div x_\xi(n\tau) = \sum D_i z_i^n \delta_1(n\tau), \quad (22)$$

где D_i – коэффициенты разложения (20) на простые дроби.

Решение (22) устойчиво, если модули корней характеристического полинома

$$|z_i| \le 1. \quad (23)$$

В [5] показано, что для соответствия решения повторяющимся автоколебаниям в релейной цепи через половину периода один из корней в (21)–(23) должен быть равен –1.

Рассматриваемая дискретная цепь согласно (10), (18) имеет импульсную характеристику:

$$h(n\tau) = -k\left(1 - e^{-n\tau}\right)\delta_1(n\tau) =$$
$$= -k\left(1 - a^n\right)\delta_1(n\tau) \div H(z) = \frac{-kz}{z-1} + \frac{kz}{z-a}, \quad (24)$$

где $a = e^{-\tau}$.

Решив (21) с учетом (24) и (12), получим характеристический полином:

$$P(z) = \frac{-k\left(1 - e^{\tau}\right)}{2\left(1 + e^{\tau}\right)} + \frac{kz}{z-1} - \frac{kz}{z - e^{-\tau}} = 0. \quad (25)$$

Введя в это решение обозначения $e^{-\tau} = a$; $e^{\tau} = 1/a$, после преобразования (25) получим характеристический полином вида

$$z^2 + z(a+1) + a = (z+a)(z+1) = 0,$$

имеющий корни $z_1 = -a = -e^{-\tau}$; $z_2 = -1$.

Корни полинома отвечают условию (23), причем имеется корень $z_2 = -1$, отвечающий указанному ранее условию существования в дискретной цепи устойчивых автоколебаний.

Оценка устойчивости автоколебаний методом анализа через период. Как указано ранее, при анализе устойчивости несимметричных автоколебаний рассматривается изменение выходного сигнала релейной цепи через период *T*. Поэтому при сохранении последовательности анализа из предыдущего раздела необходима определенная их корректировка [7], [8].

Реакция системы несимметричных автоколебаний на исчезающе малое воздействие в виде вариации выходного сигнала релейного элемента при временно́м смещении $\Delta t_n = x_\xi(nT)/\dot{x}_0$ в отличие от (15) записывается в виде

$$y_\xi(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\Delta t_n \delta_0(nT).$$

Первое уравнение в (17) практически не изменяется:

$$Y_\xi(z) = \left[\beta_0 + X_\xi(z)\right]2\dot{x}_0^{-1},$$

однако во втором уравнении необходимо учесть, что выходной сигнал релейного элемента формируется как от положительных, так и от отрицательных импульсов вариации с выхода релейного элемента.

Опишем эквивалентную импульсную характеристику линейной части в дискретной цепи (для вариаций) в случае несимметричных автоколебаний разностью двух разнополярных импульсных характеристик [12], смещенных на τ – момент обратного переключения релейного элемента:

$$h_\xi(nT) = \left[h(t) - h(t-\tau)\right]_{t=nT} =$$
$$= -k\left(1 - e^{-nT}\right)\delta_1(nT) +$$
$$+ k\left[1 - e^{-(nT-\tau)}\right]\delta_1(nT - \tau). \quad (26)$$

С учетом того что $T > \tau$, для моментов $nT > T$ (26) можно преобразовать к виду

$$h_\xi(nT) = -k\left(1 - e^{-nT}\right)\delta_1(nT) +$$
$$+ k\left[1 - e^{\tau}e^{-T}e^{-(nT-T)}\right]\delta_1(nT - T). \quad (27)$$

Аналогично предыдущему разделу для оценки метода введем вспомогательные обозначения (для $T = 2\tau$):

$$e^{-\tau} = a;\ e^{-T} = e^{-2\tau} = a^2 = b;$$
$$e^{\tau} = 1/a;\ e^{T} = 1/a^2;\ \dot{x}_0 = -k\frac{1-e^{\tau}}{1+e^{\tau}} = -k\frac{a-1}{a+1}. \quad (28)$$

С учетом введенных обозначений запишем импульсную характеристику дискретной цепи (27):

$$h_{\xi}(nT) = -k\left(1-b^n\right)\delta_1(nT) +$$
$$+\,k\left[1-ab^{(n-1)}\right]\delta_1(nT-T).$$

Тогда передаточная функция эквивалентной дискретной цепи согласно [11]:

$$H_{ДЦ}(z) = -k\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-b}\right)+k\left(\frac{1}{z-1}-\frac{a}{z-b}\right),$$

при начальном значении импульсной характеристики $h_{ДЦ}(0) = H_{ДЦ}(z)\big|_{z\to\infty} = 0.$

Согласно (21) и с учетом обозначений (28) характеристический полином замкнутой дискретной цепи при анализе устойчивости имеет вид

$$P(z) = \frac{\dot{x}_0}{2} - H_{ДЦ}(z) = \frac{-k}{2}\frac{a-1}{a+1} -$$
$$-\,k\frac{-z+bz}{(z-1)(z-b)} - k\frac{z-b-az+a}{(z-1)(z-b)} = 0.$$

После преобразований имеем

$$(z-1)\left(z+2a+a^2\right) = 0,$$

откуда получаем корни характеристического полинома:

$$z_1 = 1;$$
$$z_2 = -2a-a^2 = -2e^{-\tau}-e^{-2\tau} = e^{-\tau}\left(-2-e^{-\tau}\right).$$

При $\tau = 2$ получаем $|z_2| < 1.$ Поскольку устойчивые автоколебания в релейной цепи повторяются через период, получение корня характеристического полинома $z_1 = 1$ (соответствующего таким колебаниям) является обязательным критерием проверки результатов анализа.

Заключение. В статье представлен новый метод, позволяющий анализировать устойчивость несимметричных автоколебаний при анализе вариаций с интервалом, равным периоду. Представленный метод обладает большими возможностями, поскольку ранее разработанный метод анализа вариаций с интервалом в половину периода пригоден только для анализа устойчивости симметричных автоколебаний.

При анализе устойчивости симметричных автоколебаний разработанным и известным методами результаты практически совпадают, что является подтверждением правильности нового метода.

Вместе с этим необходимо признать, что представленный в статье метод аналитически сложнее ранее разработанного, в частности при формировании эквивалентной передаточной функции дискретной цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического управления и регулирования. М.: Наука, 1988. 358 с.

2. Бычков Ю. А. Аналитически-численный расчет динамики нелинейных систем. Детерминированные кусочно-степенные модели с сосредоточенными параметрами. Переходные и периодические режимы. Анализ, синтез, оптимизация / СПбГЭТУ "ЛЭТИ". СПб., 1997. 368 с.

3. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.

4. Морозов Д. А., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Аналитический расчет релейных цепей и систем. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2012. 128 с.

5. Ружников В. А., Силина М. В., Чернышев Э. П. Основы проектирования устойчивых моделей релейных автоколебательных радиоэлектронных и электротехнических систем // V Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии: сб. науч. докл. Санкт-Петербург, 16–19 сент. 2003 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003. С. 250–253.

6. Силина А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Обоснование наличия автоколебаний в гистерезисной релейной цепи с апериодическим звеном в цепи обратной связи // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2012. Вып. 6. С. 18–23.

7. Силина А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Особенности аналитической оценки устойчивости несимметричных автоколебаний в релейной гистерезисной цепи с фильтром нижних частот / Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2014. Вып. 2. С. 16–20.

8. Дерипаска А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Анализ соответствия аналитических методов оценки устойчивости АК в релейных цепях и системах // 9-я Междунар. науч.-практ. конф. "Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке", Москва, 26–27 сент. 2014 г. // Prospero. 2014. № 4. С. 10–15.

9. Дерипаска А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Сравнение данных аналитических методов оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях и системах второго порядка // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2015. Вып. 3. С. 3–8.

10. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.

11. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П. Основы теории электрических цепей. СПб.: Лань, 2002. 464 с.

12. Ружников В. А., Силина М. В., Чернышев Э. П. Оценка устойчивости моделей релейных автоколебательных систем // Тр. 7-го Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. Санкт-Петербург, 26–29 июня 2007 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2007. С. 242–244.

13. Ружников В. А., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Особенности применения теории дискретных цепей при исследовании устойчивости автоколебаний в релейных электрорадиоэлектронных системах // Тр. 8-го Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. Санкт-Петербург, 16–19 июня 2009 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2009. С. 283–286.

14. Силина А. Г., Соклакова М. В.,Чернышев Э. П. К разработке аналитических методов оценки устойчивости функционирования релейных автоколебательных электрорадиоэлектронных систем // Тр. 9-го Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. Санкт-Петербург, 13–16 сент. 2011 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2011. С. 329–332.

Статья поступила в редакцию 14 июня 2018 г.

Дерипаска Алина Геннадьевна – инженер-программист 2-й категории концерна «Океанприбор». Окончила Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им В. И. Ульянова (Ленина) (2010) по специальности "Прикладная математика". Автор 14 печатных работ. Сфера научных интересов – теория электротехнических систем управления; теория дискретных цепей.
E-mail: kolobok239@yandex.ru

Соклакова Марина Вячеславовна – старший преподаватель кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им В. И. Ульянова (Ленина). Окончила Санкт-Петербургский государственный университет (1986) по специальности "Прикладная математика". Автор 56 научных работ. Сфера научных интересов – теория устойчивости радиоэлектронных и электротехнических систем; теория дискретных цепей.
E-mail: mary-v-s@yandex.ru.

Чернышев Эдуард Павлович – кандидат технических наук (1967), доцент (1971), профессор кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им В. И. Ульянова (Ленина). Почетный работник Высшей школы (2006). Автор более 190 печатных работ. Сфера научных интересов – теория радиоэлектронных и электротехнических систем управления; теория дискретных цепей.
E-mail: mary-v-s@mail.ru.

REFERENCES

1. Popov E. P. *Teoriya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya i regulirovaniya* [Theory of Nonlinear Systems of Automatic Control and Regulation]. Moscow, *Nauka*, 1988, 358 p. (In Russian)

2. Bychkov Yu. A. *Analiticheski-chislennyi raschet dinamiki nelineinykh sistem. Determinirovannye kusochno-stepennye modeli s sosredotochennymi parametrami. Perekhodnye i periodicheskie rezhimy. Analiz, sintez, optimizatsiya* [Analytical-Numerical Calculation of Nonlinear System Dynamics. Deterministic Piecewise-Power Models With Lumped Parameters. Transitional and Periodic Modes. Analysis, Synthesis, Optimization]. SPb., *SPbGETU*, 1997, 368 p. (In Russian)

3. Voronov A. A. *Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost*' [Stability, Controllability, Observability]. Moscow, *Nauka*, 1979, 336 p. (In Russian)

4. Morozov D. A., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. *Analiticheskii raschet releinykh tsepei i system* [Analytical Calculation of Relay Circuits and Systems]. SPb., *Izd-vo SPbGETU "LETI"*, 2012, 128 p. (In Russian)

5. Ruzhnikov V. A., Silina M. V., Chernyshev E. P. Fundamentals of Designing Stable Models of Relay Self-Oscillating Radioelectronic and Electrotechnical Systems. V *Mezhdunar. simp. po elektromagnitnoi sovmestimosti i elektromagnitnoi ekologii* [V International Symposium on Electromagnetic Compatibility and Electromagnetic Ecology]. SPb., *Izd-vo SPbGETU "LETI"*, 2003, pp. 250–253. (In Russian)

6. Silina A. G., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. Justification of Self-Oscillation Availability in Hysteresis Relay Circuit with Aperiodic Link in Feedback Loop. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2012, no. 6, pp. 18–23. (In Russian)

7. Silina A. G., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. Features of Analytical Estimation of Asymmetric Self-Oscillation Stability in Relay Hysteresis Circuit with Low-Pass Filter. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2014, no. 2, pp. 16–20. (In Russian)

8. Deripaska A. G., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. Analysis of Analytical Methods Conformity for Assessing Stability of AK in Relay Circuits and Systems. *9 mezhdunar. nauch.-prakt. konf.: "Nauchnoe obozrenie fiziko-matematicheskikh i tekhnicheskikh nauk v XXI veke"* [9th International Scientific and Practical Conference: "Scientific Review of Physical, Mathematical and Technical Sciences in the 21st Century"]. Moscow, Prospero, 2014, no. 4, pp. 10–15. (In Russian)

9. Deripaska A. G., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. Data Comparison for Analytical Methods Estimating Stability of Auto-Oscillations in Relay Circuits and Second-Order Systems. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii*

Rossii. Radioelektronika [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2015, no. 3, pp. 3–8. (In Russian)

10. Tsypkin Ya. Z. *Osnovy teorii avtomaticheskikh system* [Automatic System Theory Fundamentals]. Moscow, *Nauka*, 1977, 560 p. (In Russian)

11. Bychkov Yu. A., Zolotnitskii V. M., Chernyshev E. P. *Osnovy teorii elektricheskikh tsepei* [Electrical Circuit Theory Fundamentals]. SPb., *Lan'*, 2002, 464 p. (In Russian)

12. Ruzhnikov V. A., Silina M. V., Chernyshev E. P. Stability Estimation of Relay Self-Oscillating Systems. *7-i Mezhdunar. simp. po elektromagnitnoi sovmestimosti i elektromagnitnoi ekologii* [7th Intern. Simp. on Electromagnetic Compatibility and Electromagnetic Ecology]. SPb., *Izd-vo SPbGETU "LETI",* 2007, pp. 242–244. (In Russian)

13. Ruzhnikov V. A., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. Features of Discrete Circuit Theory Application in Study of Self-Oscillation Stability in Relay Electronic-Radio Electronic Systems. *8-i Mezhdunar. simp. po elektromagnitnoi sovmestimosti i elektromagnitnoi ekologii* [8th International Symposium on Electromagnetic Compatibility and Electromagnetic Ecology]. SPb., *Izd-vo SPbGETU "LETI",* 2009, pp. 283–286. (In Russian)

14. Silina A. G., Soklakova M. V., Chernyshev E. P. *K razrabotke analiticheskikh metodov otsenki ustoichivosti funktsionirovaniya releinykh avtokolebatel'nykh elektroradioelektronnykh sistem* [Analytical Method Development for Estimating Stability of Relay Self-Oscillating Electro-Radio Electronic Systems]. SPb., *Izd-vo SPbGETU "LETI",* 2011, pp. 329–332. (In Russian)

Received June, 14, 2018

Alina G. Deripaska – Engineer in applied mathematics (2010, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"), Software Engineer in Concern "Okeanpribor". The author of 14 scientific publications. Area of expertise: theory of electronic and electrical control systems; discrete circuits; special problems.
E-mail: kolobok239@yandex.ru

Marina V. Soklakova – Senior Lecturer of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". Master's Degree in applied mathematics in St. Petersburg State University (2016). The author of 56 scientific publications. Area of expertise: theory of radioelectronic and electrotechnical system stability; discrete chain theory.
E-mail: mary-v-s@yandex.ru

Eduard P. Chernyshev – Ph.D. in Engineering (1967), Associate Professor (1971), Professor of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". Honorary Worker of Higher School (2006). The author of more than 190 scientific publications. Area of expertise: theory of radioelectronic and electrotechnical system stability; discrete chain theory.
E-mail: mary-v-s@mail.ru