УДК 621.396.96

И. В. Гоголев, Г. Ю. Яшин
АО «НИИ "Вектор"»
Кантемировская ул., д. 10, Санкт-Петербург, 197342, Россия

Статистические характеристики оценки параметров сигнала по максимуму нормированного коррелятора

Аннотация. *Приводится подробное исследование дисперсии оценок произвольного вектора параметров сигнала по максимуму нормированного коррелятора (НК) для случая белого и окрашенного шума. Проведено сравнение с нижней границей Крамера–Рао (НГКР).*

Показано, что использование НК приводит к появлению поправок к элементам матрицы Фишера, полученным при анализе максимально правдоподобных оценок, и в общем случае дисперсии оценок энергетических параметров по максимуму НК будут отличаться от НГКР.

В качестве конкретного приложения исследуются статистические характеристики оценки доплеровской деформации и задержки сигнала по максимуму НК при наличии неинформативных параметров. Показано, что НК по форме совпадает с известной широкополосной функцией неопределенности, при этом рецепт оценки выводится из неравенства Коши–Буняковского без обращения к закону сохранения энергии.

Также показано, что оценка деформации и задержки при неизвестных начальной фазе и амплитуде сигнала из НК является асимптотически несмещенной и эффективной.

Ключевые слова: деформация, задержка, НГКР, нормированный коррелятор, WBAF

Для цитирования: Гоголев И. В., Яшин Г. Ю. Статистические характеристики оценки параметров сигнала по максимуму нормированного коррелятора // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 3. С. 15–22.

I. V. Gogolev, G. Yu. Yashin
JSC "Vector"
10, Kantemirovskaya Str., 197342, St. Petersburg, Russia

Statistical Characteristics of Signal Parameter Estimation by Normalized Correlation Function Maximization

Abstract. *In this paper differences between Fisher Information Matrix (FIM) and inverse covariation matrix of normalized correlation estimations for white and colored noise are investigated.*

It's shown that implementation of normalized correlation function estimation leads to modification of maximum likelihood estimation FIM elements, so in case of arbitrary energy affected parameter vector, variance of estimation by normalized correlation function maximization is not equal to Cramer–Rao lower bound.

Statistical characteristics of joint Doppler stretch and delay estimation by maximization of normalized correlation function for signal with nuisance parameters are derived in this paper. It's shown that normalized correlator is equal to wideband ambiguity function, but this method of estimation follows from Cauchy–Schwarz inequality without using energy conservation assumptions.

Besides, it is proved that estimation of Doppler stretch and delay by normalized correlation function or WBAF of signal with random initial phase and gain is asymptotically unbiased and effective.

Keywords: Doppler stretch, delay, CRLB, normalized correlation function, WBAF

For citation: Gogolev I. V., Yashin G. Yu. Statistical Characteristics of Signal Parameter Estimation by Normalized Correlation Function Maximization. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 3, pp. 15–22. (In Russian)

Введение в проблему. В связи с задачами, возникающими в гидроакустике, радио- и геолокации, интенсивно исследовались алгоритмы получения оценок параметра доплеровской деформации в случае использования широкополосных сигналов, а также погрешности этих оценок [1]–[11]. Для активной локации модель измерений состояла в следующем:

– излучается сигнал $s(t)$;

– сигнал с задержкой $\tau/2$ достигает цели, движущейся с постоянной относительно источника радиальной скоростью v, и с коэффициентом отражения α отражается от него;

– в виде реализации $r(t)$ отраженный сигнал в смеси с белым гауссовским шумом со спектральной плотностью N_0 поступает на приемник локатора.

Рассмотрения основывались на анализе функционала правдоподобия

$$\Lambda(r,\ \mathbf{g}) = K\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int\left[r(t)-\dot{\alpha}s\left(\frac{t-\tau}{\gamma},\ t\right)\right]^2 dt\right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{g}=\{g_i\}$ – вектор оцениваемых параметров, включающий в себя задержку τ, параметр доплеровской деформации γ, модуль и фазу комплексного коэффициента отражения сигнала от цели $\dot{\alpha}$; K – постоянный вещественный множитель, не зависящий от параметров сигнала и шума.

Наряду с функцией правдоподобия рассматривалась и так называемая широкополосная функция неопределенности (Wide Band Ambiguity Function – WBAF), введенная в [1], [2] с целью анализа разрешающей способности сонара при появлении в луче двух целей одновременно:

$$W_{rs}(\tau,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int r(\tau)s^*\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)dt. \quad (2)$$

Анализ ситуаций с иными типами шумов в доступной авторам настоящей статьи литературе отсутствует.

Присутствие в функционале (2) множителя $1/\sqrt{\gamma}$ перед интегралом либо не комментируется, либо объясняется законом сохранения энергии. Наличие подобного множителя можно рассматривать как нормировку энергии опорного сигнала, что, в свою очередь, делает параметр деформации неэнергетическим. В работах, посвященных анализу WBAF, не разбирается вопрос эффективности оценок.

Предложено два алгоритма оценки вектора параметров: по методу максимального правдоподобия, т. е. определения $\mathbf{g}$ из системы уравнений, полученных в [5] конкретизацией (1):

$$\frac{\partial \ln\Lambda(\mathbf{g})}{\partial g_i} = \frac{2}{N_0}\int\left[r(t)-s(t,\mathbf{g})\right]\frac{\partial s(t,\mathbf{g})}{\partial g_i}dt = 0, \quad (3)$$

и отыскание $\mathbf{g}$ из условия максимума модуля WBAF:

$$\frac{\partial\left|W_{rs}(\tau,\ \gamma)\right|}{\partial g_i} = 0. \quad (4)$$

В [5], [6] $\mathbf{g}=(\tau,\ \gamma)$ и $s(t,\ \mathbf{g})$ в (3) предполагаются нормированными.

В [5] сравниваются дисперсии оценок параметров по максимуму WBAF (4) с нижней границей Крамера–Рао (НГКР), полученной из (3). При этом при записи функционала правдоподобия из вектора оцениваемых параметров исключается модуль $\dot{\alpha}$.

Следует отметить, что проведенное в [5] сравнение оценок дисперсии не имеет под собой оснований: легко показать на конкретном примере, что оценка энергетического параметра γ без одновременной оценки энергии (что происходит при реализации (3)) в общем случае является смещенной, и заключение о существовании НГКР в этой ситуации неприменимо.

В [5] при изучении влияния неопределенности в фазе на дисперсию оценок рассмотрен вектор параметров вида $\mathbf{g}=(\alpha,\ \varphi,\ \tau,\ \gamma)$. Так как параметр α пропорционален амплитуде сигнала, получаемые из (4) в данном конкретном случае результаты в среднем не смещены относительно истинных.

Полученные в [9] НГКР совпадают с оценками в [5], однако в силу ошибочного приравнивания нулю одной из корреляционных функций, результаты в [9] нельзя признать корректными.

Дисперсия асимптотически состоятельной оценки. Белый шум. При большом отношении "сигнал/шум" решение на основе WBAF (4) может быть получено следующим образом. Запишем неравенство Коши–Буняковского в виде

$$\frac{\left|\int r(t)s(t,\mathbf{g})dt\right|}{\sqrt{E_r E_s(\mathbf{g})}} \le 1, \quad (5)$$

где

$$E_r = \int r^2(t)dt;\ \ E_s(\mathbf{g}) = \int s^2(t,\ \mathbf{g})dt.$$

При отсутствии шумов оно переходит в равенство, только если сигналы пропорциональны:

$$r(t) = ks(t,\mathbf{g}), \quad (6)$$

где $k=\text{const}$ – коэффициент.

В этом случае (при известных аналитических ограничениях на зависимости от $\mathbf{g}$) задача оценки параметров может быть сведена к отысканию максимума левой части (5), т. е. к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial g_i}\int r(t)\frac{s(t,\ \mathbf{g})}{\sqrt{E_s(\mathbf{g})}}dt = 0.$$

Перейдем к нормированному опорному сигналу:

$$\xi(t,\ \mathbf{g}) = \frac{s(t,\ \mathbf{g})}{\sqrt{E_s(\mathbf{g})}}$$

и получим:

$$\int r(t)\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g})}{\partial g_i}dt = 0. \quad (7)$$

Энергия нормированного опорного сигнала $\xi(t,\ \mathbf{g})$ не зависит от оцениваемого параметра $\mathbf{g}$. В силу (6) оценка, полученная из (7), является несмещенной. Уравнение для оценки вектора параметров (7) совпадает с полученным в [5] методом максимального правдоподобия, но при его выводе предположение о гауссовском распределении шумов не использовалось. Решение полученного уравнения относительно параметра $\mathbf{g}$ эквивалентно поиску максимума функционала, в настоящей статье названного нормированным коррелятором (НК). В конкретном случае оценка запаздывания и параметра деформации (7) совпадает с (4).

Можно ожидать, что при большом отношении "сигнал/шум" оценка останется несмещенной. Для анализа ее статистических свойств при наличии аддитивного шума $n(t)$ запишем принятый сигнал в виде

$$r(t) = s(t,\ \mathbf{g}_0) + n(t) = \sqrt{E_s(\mathbf{g}_0)}\xi(t,\ \mathbf{g}_0) + n(t),$$

где $\mathbf{g}_0$ – истинное значение вектора параметров. Введем это определение в (7) и разложим полученное выражение вблизи $\mathbf{g}_0$:

$$\int\left[\xi(t,\ \mathbf{g}_0) + \frac{n(t)}{\sqrt{E_s(\mathbf{g}_0)}}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial g_i}\xi(t,\ \mathbf{g}_0) + \sum_j d_j\frac{\partial^2\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_i \partial g_j}\right]dt = 0,$$

где $d_j = g_j - g_{0j}$.

Учитывая, что

$$\int\xi(t,\ \mathbf{g}_0)\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g})}{\partial g_i} = 0,$$

решение для $\mathbf{d} = \{d_j\}$ следует искать из системы уравнений

$$\int\frac{n(t)}{\sqrt{E_s}}\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)d}{\partial g_i}t = \sum_j d_j\int\xi(t,\ \mathbf{g}_0)\frac{\partial^2\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_i \partial g_j}dt. \quad (8)$$

Из структуры (8) очевидно, что $\langle\mathbf{d}\rangle = 0$ ($\langle\cdot\rangle$ – символ статистического усреднения), т. е. оценка не смещена.

Дважды продифференцировав условие нормировки, установим тождество:

$$\int\xi(t,\ \mathbf{g})\frac{\partial^2}{\partial g_i \partial g_j}\xi(t,\ \mathbf{g})dt = -\int\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g})}{\partial g_i}\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g})dt}{\partial g_j}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что элементы ковариационной матрицы σ_{ij}^2 являются решением системы уравнений

$$\frac{1}{E_s}\iint\langle n(t)n(u)\rangle\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_i}\frac{\partial\xi(u,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_l}dtdu =$$
$$= \sum_{jk}\sigma_{jk}^2\int\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_i}\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_j}dt\times$$
$$\times\int\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_l}\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_k}dt. \quad (10)$$

Если $n(t)$ – реализация белого шума со спектральной плотностью N_0, то (10) удовлетворяется решением

$$\sigma_{ik}^2 = \left[J^{-1}\right]_{ik},$$

где

$$J_{jl} = \frac{2E_s}{N_0}\int\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_j}\frac{\partial\xi(t,\ \mathbf{g}_0)}{\partial g_l}dt. \quad (11)$$

Полученный результат может быть также представлен в виде

$$J_{jl} = \Phi_{jl}^0 - \frac{2E_s}{N_0}\frac{1}{4E^2(\mathbf{g}_0)}\frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial g_j}\frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial g_l}, \quad (12)$$

где

$$\Phi_{jl}^0 = \frac{2}{N_0}\left[\int\frac{\partial s(t,\ \mathbf{g})}{\partial g_j}\frac{\partial s(t,\ \mathbf{g})}{\partial g_l}dt\right] \quad (13)$$

– элементы информационной матрицы Фишера, полученные методом максимального правдоподобия при гауссовском распределении шумов [12].

Производные в (11)–(13) берутся при $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$.

Асимптотически состоятельная оценка с наименьшей дисперсией. Окрашенный шум. Для получения оценки при произвольной спектральной плотности шума заметим, что максимум функционала

$$\iint r(t)\Lambda(t,\ u)\frac{s(u,\ \mathbf{g})}{\sqrt{N(\mathbf{g})}}dtdu, \quad (14)$$

где

$$N(\mathbf{g}) = \iint s(t,\ \mathbf{g})\Lambda(t,\ u)s(u,\ \mathbf{g})dtdu$$

с положительно-определенным ядром Λ при отсутствии шумов достигается при $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$. Для доказательства достаточно разложить $s(u)$ и $r(t)$ в (14) по собственным функциям ядра и заметить, что это утверждение эквивалентно теореме Коши–Буняковского в применении к функциям

$$\tilde{r}(t) = \sum_i r_i \lambda_i^{1/2} f_i(t); \ \tilde{s}(t) = \sum_i s_i \lambda_i^{1/2} f_i(t), \quad (15)$$

где λ_i и $f_i(t)$ – собственные числа и соответствующие им нормированные собственные функции ядра; r_i и s_i – коэффициенты разложения по ним $r(t)$ и $s(t)$.

Аналогом (7) становится система

$$\frac{\partial}{\partial g_i} \iint r(t) \Lambda(t, u) \xi(u, \mathbf{g}) dt du = 0, \quad (16)$$

где

$$\xi(u, \mathbf{g}) = \frac{s(u, \mathbf{g})}{\sqrt{N(\mathbf{g})}}.$$

Разложив (16) вблизи $\mathbf{g}_0$, имеем систему уравнений для оценки:

$$\iint r(t) \Lambda(t, u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du = 0$$

и аналог (8)

$$\iint \frac{n(t)}{\sqrt{N(\mathbf{g}_0)}} \Lambda(t, u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du =$$
$$= -\sum_j d_j \int \xi(t, \mathbf{g}_0) \Lambda(t, u) \frac{\partial^2 \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i \partial g_j} dt du. \quad (17)$$

В силу тождества, аналогичного (9), правую часть (17) можно представить в более симметричном виде

$$\iint \frac{n(t)}{\sqrt{N(\mathbf{g}_0)}} \Lambda(t,u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du =$$
$$= \sum_j d_j \int \frac{\partial \xi(t, \mathbf{g}_0)}{\partial g_j} \Lambda(t,u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du. \quad (18)$$

Как и ранее, несмещенность оценки очевидна.

Покажем, что дисперсия оценки оказывается наименьшей при выборе функционала:

$$\Lambda(t, u) = Q_n(t, u),$$

где $Q_n(t, u)$ – ядро, выбеливающее ковариационную функцию шумов (помех).

Уравнение (18) может быть записано в матрично-векторной форме: $\mathbf{y} = \Lambda \mathbf{d}$, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{d}$ – векторы с размером m; Λ – матрица с размерами $m \times m$, причем m – число оцениваемых параметров.

Элементы вектора $\mathbf{y}$ определяются следующим образом:

$$y_i = \iint \frac{n(t)}{\sqrt{N(\mathbf{g}_0)}} \Lambda(t, u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du,$$

а элементы матрицы Λ имеют вид

$$\Lambda_{ij} = \int \frac{\partial \xi(t, \mathbf{g}_0)}{\partial g_j} \Lambda(t, u) \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_i} dt du,$$

причем матрица Λ симметрична.

При условии, что не существует линейной комбинации параметров, от которой функционал (14) не зависит, детерминант Λ не равен нулю. Тогда существует унитарное преобразование L, приводящее Λ к диагональному виду

$$L \Lambda L^{-1} = \mathrm{diag},$$

и набор ее собственных векторов полон в пространстве с размерами $m \times m$. Переходя в представление собственных векторов, запишем (18) в виде

$$\iint \frac{n(t)}{\sqrt{N(\mathbf{g}_0)}} \Lambda(t, u) \theta_i(u, \mathbf{g}_0) dt du =$$
$$= \tilde{d}_i \iint \theta_i(t, \mathbf{g}_0) \Lambda(t, u) \theta_i(u, \mathbf{g}_0) dt du, \quad (19)$$

где

$$\theta_i(u, \mathbf{g}_0) = \sum_j L_{ij} \frac{\partial \xi(u, \mathbf{g}_0)}{\partial g_j},$$
$$\tilde{\mathbf{d}} = L \mathbf{d}.$$

Очевидно, что дисперсии компонент $\tilde{\mathbf{d}}$ пропорциональны дисперсиям компонент левой части (19).

Хорошо известно [13], что минимальность дисперсии решений (19) соответствует минимальности дисперсии произвольных линейных комбинаций компонент $\tilde{\mathbf{d}}$, в том числе компонент

$$\mathbf{d} = L^{-1} \tilde{\mathbf{d}}.$$

Возведя (19) в квадрат, для дисперсии i-й компоненты $\tilde{\mathbf{d}}$, получим:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N(\mathbf{g}_0)} \int \Big[\langle n(t) n(t_1) \rangle \Lambda(t, u) \times$$
$$\times \theta_i(u, \mathbf{g}_0) \Lambda(t_1, u_1) \theta_i(u_1, \mathbf{g}_0) dt dt_1 du du_1 \Big] \times$$
$$\times \Big[\iint \theta_i(t, \mathbf{g}_0) \Lambda(t, u) \theta_i(u, \mathbf{g}_0) dt du \Big]^{-2}. \quad (20)$$

Для отыскания ядра $\Lambda(t, u)$, минимизирующего σ_i^2, можно разложить все функции в (20) по произвольной ортонормированной системе, переведя интегралы в дискретные суммы. Продифференцировав правую часть (20) по матричным элементам Λ_{kl} и приравняв производные к нулю, придем к системе уравнений

$$\theta_{i_\kappa}\sum_{\rho,\,\chi} N_{\varsigma\rho}\Lambda_{\rho\chi}\theta_{i_\chi}+\theta_{i_\varsigma}\sum_{\rho,\,\chi}\theta_{i_\rho}\Lambda_{\rho\chi}N_{\chi\kappa}=\theta_{i_\kappa}\theta_{i_\varsigma}\eta_i, \quad (21)$$

где $N_{\varsigma\rho}$, $N_{\chi\kappa}$ – коэффициенты разложения ковариационной функции шумов; $\Lambda_{\rho\chi}$ – коэффициенты разложения искомого ядра;

$$\eta_i=\sum_{\rho,\,\chi,\,\mu,\,\nu}\theta_{i_\rho}\Lambda_{\rho\chi}N_{\chi\mu}\Lambda_{\mu\nu}\theta_{i_\nu}\left[\sum_{\rho,\,\chi}\theta_{i_\rho}\Lambda_{\rho\chi}\theta_{i_\chi}\right]^{-1} \quad (22)$$

– натуральное число.

Учитывая, что $\theta_i(t,\,\mathbf{g}_0)$ и, соответственно, θ_{i_κ} произвольны, из (21) заключаем, что матрица $\Lambda_{\rho\chi}$ с точностью до множителя η_i обратна матрице $N_{\rho\chi}$. Подставив результат в (22), убеждаемся, что η_i – произвольное вещественное число. Оно может быть выбрано независимым от векторного индекса i, в частности, можно положить $\eta_i=1$. Из (19), (20) следует, что умножение на произвольное число не изменяет результатов расчета.

Таким образом показано, что $\Lambda(t,u)$ является ядром, выбеливающим ковариационную функцию шумов.

Ковариационная матрица оценки при этом определяется выражением

$$\sigma_{ij}^2=\left[J^{-1}\right]_{ij},$$

где

$$J_{ij}=N(\mathbf{g}_0)\int\frac{\partial\xi(t,\mathbf{g})}{\partial g_j}Q_\text{n}(t,u)\frac{\partial\xi(u,\mathbf{g})}{\partial g_i}dtdu. \quad (23)$$

Выражение (23) приводится к виду

$$J_{ij}=\Phi_{ij}^0-\frac{1}{4N(\mathbf{g}_0)}\frac{\partial N(\mathbf{g})}{\partial g_j}\frac{\partial N(\mathbf{g})}{\partial g_i}. \quad (24)$$

В рассматриваемом случае элементы матрицы Фишера в предположении о гауссовском характере шумов определяются следующим образом [12]:

$$\Phi_{ij}^0=\int\frac{\partial s(t,\mathbf{g})}{\partial g_j}Q_\text{n}(t,u)\frac{\partial s(u,\mathbf{g})}{\partial g_i}dtdu. \quad (25)$$

Производные в (23)–(25) берутся при $\mathbf{g}=\mathbf{g}_0$.

Отметим, что при выводе (23) не использовались предположения о гауссовости и стационарности шума.

НГКР одновременных оценок времени запаздывания, параметра доплеровской деформации, амплитуды и фазы отраженного сигнала.

Запишем принятый сигнал в виде

$$\begin{aligned}\dot r(t)&=\dot s(t,\,a,\,\tau,\,\gamma,\,\varphi)+\dot n(t)=\\&=a\dot s\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)e^{i\varphi}+\dot n(t),\end{aligned} \quad (26)$$

где a, φ – амплитуда и начальная фаза сигнала соответственно; $\dot n(t)$ – вклад белого гауссовского шума со спектральной плотностью N_0.

В [14] получена информационная матрица Фишера для совместных оценок параметров сигнала $\mathbf{g}=\{a,\,\tau,\,\gamma,\,\varphi\}$ на фоне белого гауссовского шума в виде

$$\Phi=\frac{2a^2E_0}{N_0\gamma}\begin{bmatrix}\gamma^2/a^2 & 0 & \gamma/(2a) & 0\\ 0 & \overline{\Omega^2} & \overline{t\Omega^2} & \overline{\Omega}\\ \gamma/(2a) & \overline{t\Omega^2} & \overline{t^2\Omega^2} & \overline{t\Omega}\\ 0 & \overline{\Omega} & \overline{t\Omega} & \gamma^2\end{bmatrix}, \quad (27)$$

где

$$E_0=\int\dot s\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)\dot s^*\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)dt;$$

$$\overline{\Omega}=-\frac{1}{E_0}\operatorname{Im}\int\dot s(t)\dot s'^*(t)\,dt;$$

$$\overline{t\Omega}=-\frac{1}{E_0}\operatorname{Im}\int t\dot s(t)\dot s'^*(t)\,dt;$$

$$\overline{\Omega^2}=\frac{1}{E_0}\int|\dot s(t)|^2\,dt;$$

$$\overline{t\Omega^2}=\frac{1}{E_0}\int t|\dot s'(t)|^2\,dt;$$

$$\overline{t^2\Omega^2}=\frac{1}{E_0}\int t^2|\dot s'(t)|^2\,dt.$$

Сравним результаты, полученные в условиях воздействия белого шума (12) по методу НК, определяемые матрицей эффективной оценки (27).

Определим энергию сигнала (26) как

$$\begin{aligned}E(\mathbf{g})&=\int a^2\dot s\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)\exp(j\varphi)\dot s^*\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right)\exp(-j\varphi)dt=\\&=a^2\gamma E_0;\end{aligned}$$

Частные производные энергии имеют вид

$$\frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial a} = 2a\gamma E_0; \quad \frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial \tau} = 0;$$
$$\frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial E(\mathbf{g})}{\partial \gamma} = a^2 E_0.$$

а информационная матрица оценок по методу НК записывается следующим образом:

$$J = \frac{2a^2 E_0}{N_0 \gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Omega^2} & \overline{t\Omega^2} & \bar{\Omega} \\ 0 & \overline{t\Omega^2} & \overline{t^2\Omega^2} - \frac{1}{4} & \overline{t\Omega} \\ 0 & \bar{\Omega} & \overline{t\Omega} & \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Обнуление элементов матрицы, связанных с амплитудой сигнала, – ожидаемое явление, так как использование НК исключает возможность отыскания оценки амплитуды. Таким образом, из вектора оценки параметров исключается амплитуда сигнала, и для вектора $\mathbf{g} = \{\tau, \gamma, \varphi\}$ информационная матрица определяется как

$$J = \frac{2a^2 E_0}{N_0 \gamma} \begin{bmatrix} \overline{\Omega^2} & \overline{t\Omega^2} & \bar{\Omega} \\ \overline{t\Omega^2} & \overline{t^2\Omega^2} - \frac{1}{4} & \overline{t\Omega} \\ \bar{\Omega} & \overline{t\Omega} & \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Запишем алгебраические дополнения к диагональным элементам матрицы Фишера:

$$A_{22}^{\Phi} = \frac{\gamma^2}{a^2}\left[\left(\overline{t^2\Omega^2}\gamma^2 - \overline{t\Omega}^2\right) - \frac{\gamma^2}{4}\right];$$

$$A_{33}^{\Phi} = \frac{\gamma^2}{a^2}\left(\overline{\Omega^2}\gamma^2 - \bar{\Omega}^2\right)$$

и определитель этой матрицы:

$$\det\Phi = \frac{\gamma^2}{a^2}\left[A_{11}^{\Phi} - \frac{1}{4}\left(\overline{\Omega^2}\gamma^2 - \bar{\Omega}^2\right)\right].$$

Можно показать, что существуют следующие соотношения между определителями матрицы Фишера и информационной матрицы, полученной по методу НК:

$$\det J = (a/\gamma)^2 \det\Phi.$$

Отсюда следует, что между алгебраическими дополнениями к диагональным элементам этих матриц существуют соотношения:

$$A_{22}^{J} = (a/\gamma)^2 A_{33}^{\Phi}; \quad A_{11}^{J} = (a/\gamma)^2 A_{11}^{\Phi}.$$

Дисперсии оценок параметров определяются диагональными элементами матрицы, обратной информационной. Таким образом, дисперсии оценок задержки и доплеровского масштаба сигнала, полученные по методу НК, совпадают с НГКР:

$$\frac{A_{11}^{J}}{\det J} = \frac{A_{22}^{\Phi}}{\det\Phi} = \sigma_{\tau}^2; \tag{28}$$

$$\frac{A_{22}^{J}}{\det J} = \frac{A_{33}^{\Phi}}{\det\Phi} = \sigma_{\gamma}^2. \tag{29}$$

В [15] проанализировано влияние отсутствия априорной информации об амплитуде и фазе на дисперсию оценки произвольного параметра известного сигнала. Показано, что незнание амплитуды сигнала не влияет на смещение и дисперсию оценки неэнергетического параметра. Дисперсия оценки энергетического параметра в общем случае отличается от НГКР.

Полученные результаты (12) и (15) определяют вид поправок к элементам информационной матрицы Фишера при совместной оценке нескольких параметров в присутствии белого шума, а также для шума с произвольной ковариационной матрицей. Сравнение дисперсий оценки задержки и доплеровского масштаба (28), (29) с НГКР показывает, что оценка по максимуму НК, совпадающего по форме с широкополосной функцией неопределенности (2), является асимптотически эффективной.

Заключение. Обращение к неравенству Коши–Буняковского приводит к получению алгоритма оценки энергетического параметра сигнала по максимуму НК. Для оценки доплеровской деформации и задержки сигнала НК по форме совпадает с широкополосной функцией неопределенности.

Показано, что использование НК приводит к появлению поправок к элементам матрицы Фишера, полученным при анализе максимально правдоподобных оценок, и в общем случае дисперсии оценок энергетических параметров по максимуму НК будут отличаться от НГКР.

С другой стороны, дисперсия оценки доплеровской деформации и задержки сигнала при неизвестной начальной фазе и амплитуде сигнала из НК при большом отношении "сигнал/шум" совпадает с границей Крамера–Рао.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Swick D. A. An Ambiguity Function Independent of As-sumptions About Bandwidth and Carrier Frequency. NRL Report 6471, 1966. URL: http://www.dtic.mil/dtic/tr /fulltext/u2/645918.pdf (дата обращения: 20.02.2018).

2. Swick D. A. A Review of Wideband Ambiguity Function. NRL Report 6994, 1969. URL: http://www. norbertwiener.umd.edu/crowds/documents/Swick69.pdf (дата обращения: 25.12.2017).

3. Gassner R., Cooper G. Note on a Generalized Ambiguity Function // IEEE Trans. on Information Theory. 1967. Vol. 13, № 1. P. 126.

4. Swerling P. Parameter Estimation Accuracy Formulas // IEEE Trans. on Information Theory. 1964. Vol. 10, № 4. P. 302–314.

5. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. The Estimation of Time Delay and Doppler Stretch of Wideband Signals // IEEE Trans. on Signal Processing. 1995. Vol. 43, iss. 4. P. 904–916.

6. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. Wideband Time Delay and Doppler Stretch Estimation: Application of Wavelet Transform and the Optimum Signal // IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-1993), Minneapolis, USA, 27–30 Apr. 1993. URL: https://ieeexplore.ieee.org /stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=319100 (дата обращения: 25.12.2017).

7. Niu X. X., Ching P. C. Accurate Time Delay and Doppler Stretch Estimation in Noisy Environment // Proc. on IEEE TENCON, Perth, WA, Australia, 29–29 Nov. 1996. URL: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=& arnumber=608424 319100 (дата обращения: 25.12.2017).

8. A Novel Approach for Joint Estimation of Time Delay and Scale Factor with Applications to the M-Wave Analysis / W. Muhammad, O. Meste, H. Rix, D. Farina // Proc. on IEEE Engineering in Medicine and Biology Society conf. Istanbul, Turkey, 25–28 Oct. 2001. P. 1093–1096. URL: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp ?tp=&arnumber=1020380 (дата обращения: 20.02.2018).

9. Wei H., Ye S., Wan Q. Influence of Phase on Cramer-Rao Lower Bounds for Joint Time Delay and Doppler Stretch Estimation // Proc. of 9th Intern. Symp. on Signal Processing and Its Applications (ISSPA-2007), Sharjah, 12–15 Feb. 2007. URL:https://ieeexplore.ieee.org /stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=4555336 (дата обращения: 20.02.2018).

10. Wei Yang, Yaowu Shi. Theoretical Study on Time Delay and Doppler Stretch Estimation of Chirp Signal Based on Wavelet-Cumulants // Proc. on 3rd IEEE ICCSIT, Chengdu, China, 9–11 July 2010. URL: https://ieeexplore.ieee.org /stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5564138 (дата обращения: 20.02.2018).

11. Weiss L. G. Wavelets and Wideband Correlation Processing // IEEE Sign. Proc. Magazine Jan. 1994. № 1. P. 13–32.

12. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том I / пер. с англ., под ред. В. И. Тихонова. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.

13. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.

14. Гоголев И. В. Граница Крамера–Рао оценки доплеровской деформации и задержки сигнала с произвольной шириной спектра // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2016. № 6. С. 3–6.

15. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2017 г.

Гоголев Иван Васильевич – магистр по направлению "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" (2014), инженер 1-й категории научно-исследовательской лаборатории АО «НИИ "Вектор"», аспирант кафедры радиоэлектронных средств Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 14 научных работ. Сфера научных интересов – пассивная радиолокация, статистическая радиотехника.
E-mail: ivgogolev@inbox.ru

Яшин Геннадий Юрьевич – кандидат физико-математических наук (1980), главный специалист 1-й категории АО «НИИ "Вектор"». Автор более 60 научных работ. Сфера научных интересов – пассивная радиолокация; статистическая радиотехника.
E-mail: yashin.gamma@yandex.ru

REFERENCES

1. Swick D. A. An Ambiguity Function Independent of Assumptions About Bandwidth and Carrier Frequency. NRL Report 6471, 1966. Available at: http://www.dtic.mil /dtic/tr /fulltext/u2/645918.pdf (accessed: 20.02.2018).

2. Swick D. A. A Review of Wideband Ambiguity Function. NRL Report 6994, 1969. Available at: http://www. norbertwiener.umd.edu/crowds/documents /Swick69.pdf (accessed: 25.12.2017).

3. Gassner R., Cooper G. Note on a Generalized Ambiguity Function. IEEE Trans. on Information Theory. 1967, vol. 13, no. 1, p. 126.

4. Swerling P. Parameter Estimation Accuracy Formulas. IEEE Trans. on Information Theory. 1964, vol. 10, no. 4, pp. 302–314.

5. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. The Estimation of Time Delay and Doppler Stretch of Wideband Signals. IEEE Trans. on Signal Processing. 1995, vol. 43, iss. 4, pp. 904–916.

6. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. Wideband Time Delay and Doppler Stretch Estimation: Application of Wavelet Transform and the Optimum Signal. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-1993), Minneapolis, USA, 27–30 Apr. 1993. Available at: https://ieeexplore.

ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=319100 (accessed: 25.12.2017).

7. Niu X. X., Ching P. C. Accurate Time Delay and Doppler Stretch Estimation in Noisy Environment. Proc. on IEEE TENCON, Perth, WA, Australia, 29–29 Nov. 1996. Available at: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp ?tp=& arnumber=608424 319100 (accessed: 25.12.2017).

8. Muhammad W., Meste O., Rix H., Farina D. A Novel Approach for Joint Estimation of Time Delay and Scale Factor with Applications to the M-Wave Analysis. Proc. on IEEE Engineering in Medicine and Biology Society conf. Istanbul, Turkey, 25–28 Oct. 2001, pp.1093–1096. Available at: https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber =1020380 (accessed: 20.02.2018).

9. Wei H., Ye S., Wan Q. Influence of Phase on Cramer-Rao Lower Bounds for Joint Time Delay and Doppler Stretch Estimation. Proc. of 9th Intern. Symp. on Signal Processing and Its Applications (ISSPA-2007), Sharjah, 12–15 Feb. 2007. Available at: https://ieeexplore.ieee.org /stamp /stamp.jsp?tp=&arnumber=4555336 (accessed: 20.02.2018).

10. Wei Yang, Yaowu Shi. Theoretical Study on Time Delay and Doppler Stretch Estimation of Chirp Signal Based on Wavelet-Cumulants. Proc. on 3rd IEEE ICCSIT, Chengdu, China, 9–11 July 2010. Available at: https://ieeexplore.ieee.org /stamp /stamp.jsp?tp=&arnumber=5564138 (accessed: 20.02.2018).

11. Weiss L. G. Wavelets and Wideband Correlation Processing. IEEE Sign. Proc. Magazine Jan. 1994, no. 1, pp. 13–32.

12. Van Trees H. L. Detection, estimation and modulation theory. Part 1. New York, Wiley, 1968, 626 p.

13. Hudson D. J. Statistics. Lectures on Elementary Statistics and Probability. CERN, Geneva, 1963, 101 p.

14. Gogolev I.V. Doppler Stretch and Delay Cramer-Rao Lower Bound for Signal with Large Bandwidth. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics], 2016, no. 6, pp. 3–6. (In Russian)

15. Kulikov E. I., Trifonov A. P. *Otsenka parametrov signalov na fone pomekh* [Signal Parameter Estimation on Noised Environment]. Moscow, Soviet Radio publ., 1978, 296 p. (In Russian)

Received December, 29, 2017

Ivan V. Gogolev – Master's Degree in Infocommunication Systems (2014), postgraduate student of Department of Radio Electronic Equipment of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". Engineer (2012) in Research and Development Laboratory of JSC «SRI "Vector"» (Saint Petersburg). The author of 14 scientific publications. Area of expertise: passive location, statistical radio engineering.
E-mail: ivgogolev@inbox.ru

Gennady Yu. Yashin – Ph.D. in Physics and Mathematics (1980), senior specialist in research institute JSC «SRI "Vector"» (Saint Petersburg). The author of more than 60 scientific publications. Area of expertise: passive location; statistical radiotechnics.
E-mail yashin.gamma@yandex.ru