

УДК 681.5+612.13

С. А. Пыко, Н. С. Пыко, О. А. Маркелов, Ю. Д. Ульяницкий, М. И. Богачев  
 Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
 университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Исследование методов оценивания стабильности взаимного поведения стохастических процессов<sup>1</sup>

*На примере тестовых процессов с заданными корреляционными свойствами исследована чувствительность методов оценивания стабильности взаимной динамики стохастических процессов к фазовой расстройке между ними. Рассмотрены два класса нормально распределенных стохастических случайных процессов: процессы с кратковременной зависимостью и процессы с долговременной зависимостью, характеризующихся заданным показателем Херста.*

**Коэффициент фазовой синхронизации, корреляционная функция, время корреляции, показатель Херста, функция когерентности**

Исследование особенностей совместного поведения случайных процессов представляет большой интерес в различных областях науки, связанных с изучением параллельно регистрируемых данных, описывающих функционирование сложных систем. В рамках настоящей статьи рассмотрены четыре подхода к оцениванию стабильности взаимного поведения двух процессов.

**Коэффициент фазовой синхронизации (Sync).** Коэффициент определялся на основе анализа разности фаз двух процессов. Мгновенные значения фаз вычислялись с использованием преобразования Гильберта, позволяющего сформировать аналитический сигнал – комплексную функцию  $\dot{s}(t)$  добавлением к вещественному сигналу  $s(t)$  мнимой составляющей  $s_{\perp}(t)$ , сформированной указанным преобразованием:

$$s_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Мгновенные значения фазы определялись аргументом аналитического сигнала

$$\Phi(t) = \arctg \frac{s_{\perp}(t)}{s(t)}.$$

Разность фаз двух процессов обрабатывалась в скользящем окне. Соседние фазовые точки считались принадлежащими интервалу синхронизации, если среднеквадратическое отклонение разностной фазы в окне оказывалось меньше заданного порога.

Коэффициент фазовой синхронизации вычислялся как доля интервалов синхронизации в общей последовательности данных [1]–[3].

**Метод оценивания стабильности временной задержки.** Метод основан на вычислении стабильности временной задержки максимума взаимной корреляционной функции (ВКФ) двух процессов. Для вычисления коэффициента стабильности TDS (Time Delay Stability) ВКФ процессов рассчитывался в последовательных перекрывающихся на 50 % окнах фиксированной длины. При каждом положении окна определялось значение временной задержки максимума модуля ВКФ относительно середины окна. Стабильность взаимного поведения процессов отмечалась, если на протяжении не менее пяти последовательных фрагментов анализа задержка максимума модуля ВКФ изменялась не более чем на заданное пороговое значение. Коэффициент TDS рассчитывался как доля интервалов стабильности временной задержки в общей последовательности фрагментов анализа [4].

**Метод определения среднего времени корреляции разности фаз анализируемых сигналов.** Третий рассмотренный метод основан на расчете указанного времени. Мгновенные значения фаз сигналов, как и при вычислении коэффициента фазовой синхронизации Sync, вычислялись с использованием преобразования Гильберта. Интервал наблюдения процессов делился на последовательные фрагменты одинаковой длительности  $T$ , перекрывающиеся на 50 %. В каждом  $i$ -м фрагменте рассчитывался автокорреляционная функция разности фаз  $K_{\phi i}(\tau)$  и вычислялось соответствующее ей время корреляции:

$$\text{TAU}_i = \frac{\int_0^T |K_{\phi i}(\tau)| d\tau}{K(0)}.$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (исследовательский проект № 16-19-00172).

Итоговой характеристикой взаимной динамики процессов является усредненное по совокупности фрагментов анализа время корреляции ТАУ [5].

**Среднее значение функции когерентности.** Последний из рассмотренных подходов предполагает использование в качестве оценки стабильности взаимного поведения двух процессов среднего значения функции когерентности (коэффициента когерентности *Coher*) [6]. В отличие от трех рассмотренных ранее характеристик функция когерентности позволяет оценить особенности совместного поведения процессов не во временной, а в частотной области. Функция когерентности двух процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  принимает значения в интервале  $[0, 1]$  и определяется выражением

$$C_{xy}(f) = \frac{|P_{xy}(f)|^2}{P_x(f)P_y(f)},$$

где  $P_x(f)$  и  $P_y(f)$  – спектральные плотности мощностей процессов, а  $P_{xy}(f)$  – их взаимная спектральная плотность.

Методы, основанные на расчете коэффициента TDS и среднего значения функции когерентности *Coher*, позволяют учесть только степень линейной связи между процессами. При использовании коэффициента фазовой синхронизации *Sync* и среднего времени корреляции разности фаз процессов ТАУ учитываются более сложные механизмы их взаимодействия. В качестве важного преимущества коэффициента *Sync* по сравнению с другими мерами степени взаимодействия процессов следует отметить, что для его оценивания не требуется стационарности наблюдаемых данных.

Тестовые случайные процессы (СП), на примере которых изучалась чувствительность описанных методов в отношении фазовой расстройки, были получены моделированием. В работе рассмотрены два класса нормально распределенных стохастических СП. СП с кратковременной зависимостью, описываемой автокорреляционной функцией вида  $K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$ , были сформированы с помощью авторегрессионного фильтра первого порядка  $x_{i+1} = ax_i + \xi_i$ , где  $a = -1/\ln \tau$ ;  $\xi_i$  – отсчеты "белого" шума. Процессы с долговременной зависимостью, характеризующейся показателями Херста  $H = 0.5 \dots 1.5$ , были сформированы с помощью фильтра с модулем передаточной функции вида  $B(f) = \sigma^2 f^{(1-\gamma)}$ , где  $\gamma = 2 - 2H$ .

При этом  $H = 0.5$  соответствует "белому" шуму,  $H = 1.5$  – винеровскому случайному процессу. Для стационарных процессов, характеризующихся значениями  $0.5 < H < 1$ , автокорреляционная функция имеет вид  $K(\tau) = \sigma^2 |\tau|^{-\gamma}$ .

Для каждого обрабатываемого тестового СП формировалась его копия, в которую в частотной области вносилась фазовая расстройка. Она моделировалась в соответствии с подходом, подробно описанным в [7], добавлением к каждому значению гильбертовой фазы СП независимых значений случайной фазы, равномерно распределенной в диапазоне  $[-\varphi, \varphi]$ . Границы диапазона в ходе исследования увеличивались до достижения максимально возможного значения  $\varphi = \pi$ . При каждом значении границ диапазона фазовой расстройки моделирование повторялось 1000 раз, после чего для каждого из четырех рассматриваемых коэффициентов определялись их статистические характеристики (среднее значение, медиана, среднеквадратическое отклонение, квартили).

На рис. 1–3 представлены результаты оценивания коэффициентов *Sync*( $\varphi$ ), TDS( $\varphi$ ) и ТАУ( $\varphi$ ) соответственно, характеризующих во временной области стабильность взаимного поведения тестовых СП, в один из которых внесена случайная фазовая расстройка с заданными параметрами. Графики отображают медианы коэффициентов, интервальные засечки – их квартили. Вертикальные линии отмечают интерквартильные диапазоны. Графики на рис. 1–3, а иллюстрируют изменения статистических характеристик оценок коэффициентов для процессов с кратковременной зависимостью при времени корреляции  $\tau_k = 1, 3, 5$  и 10 с. Рис. 1–3, б характеризуют влияние на оценки коэффициентов значений показателя Херста  $H$  для процессов с долговременной зависимостью.

Проведенные исследования показали, что коэффициент фазовой синхронизации *Sync* реагирует на вносимую фазовую расстройку, уменьшаясь от 100 % при отсутствии расстройки до 0. Для процессов с кратковременной зависимостью по мере увеличения времени корреляции процессов значения коэффициента *Sync* при одинаковых значениях расстройки увеличиваются. Разброс оценок коэффициента не превышает 10–20 %. Для процессов с долговременной зависимостью по мере увеличения значений показателя Херста скорость спада коэффициента *Sync* уменьшается, а разброс оценок увеличивается.

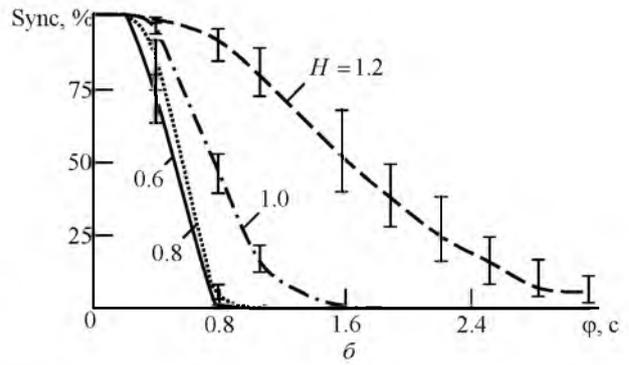
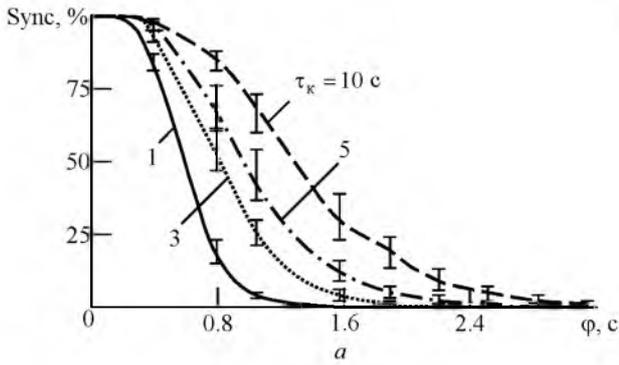


Рис. 1

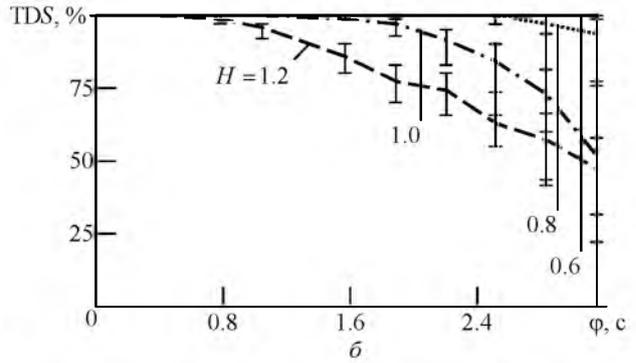
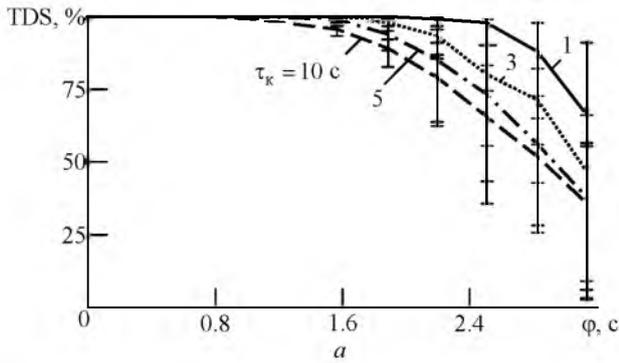


Рис. 2

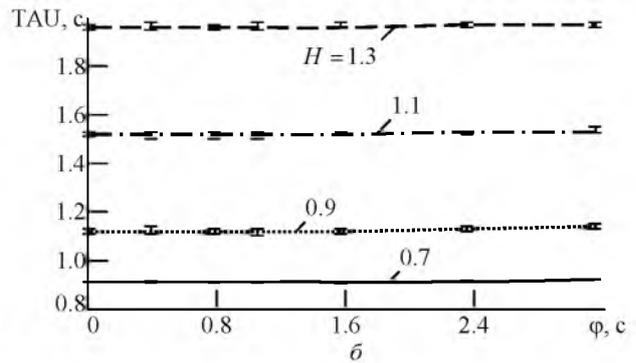
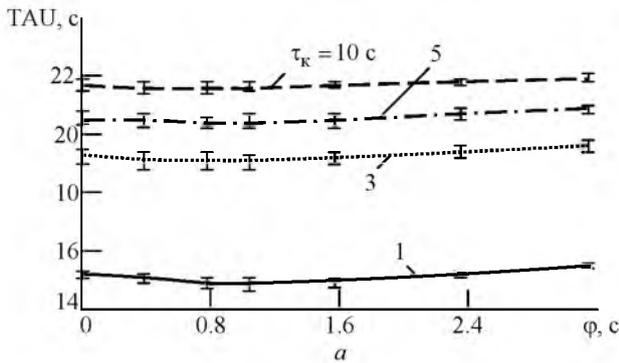


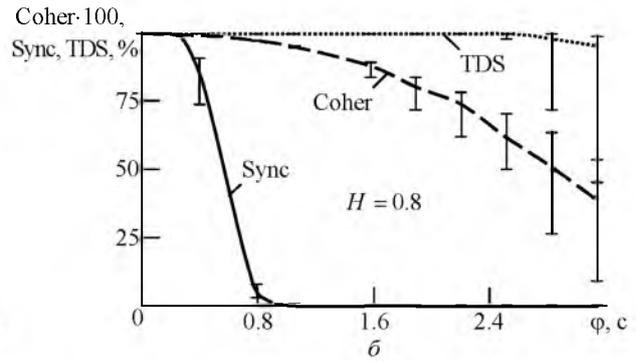
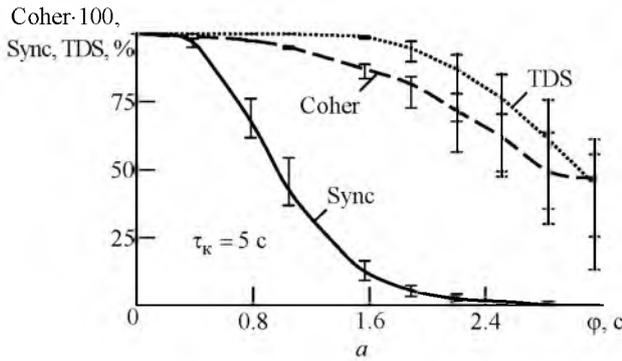
Рис. 3

Метод, основанный на вычислении стабильности временной задержки, обладает меньшей чувствительностью к вводимой фазовой расстройке между парой анализируемых СП (рис. 2). При этом в достаточно большом диапазоне изменений границ фазовой расстройки реакция на вводимую расстройку при расчете коэффициента TDS отсутствует. Кроме того, дисперсия оценок коэффициента TDS значительно увеличивается при возрастании фазовой расстройки, в несколько раз превышая дисперсию оценок коэффициента фазовой синхронизации Sync.

Как показано на рис. 3, а, б, метод, основанный на вычислении среднего времени корреляции разности фаз TAU, слабо реагирует на вносимую фазовую расстройку. Различия в оценках вызваны в основном изменением параметров генерируемых тестовых сигналов, а не величиной расстройки. Разброс полученных оценок при этом незначителен.

Исследование оценок коэффициента когерентности Coher показало, что свойства тестовых процессов практически не влияют на результат оценивания, причем даже при максимальной фазовой расстройке оценки коэффициента когерентности не уменьшаются до 0.

На рис. 4 представлены зависимости, иллюстрирующие статистические характеристики оценок коэффициентов Sync, TDS и Coher для гауссовских процессов с временем корреляции 5 с (рис. 4, а), а также для процессов с долговременной зависимостью с коэффициентами Херста  $H = 0.8$  (рис. 4, б) и  $H = 1.0$  (рис. 4, в). Для обеспечения сопоставления показателей взаимного поведения процессов, полученных разными методами, оценки коэффициента когерентности Coher умножались на 100. Как видно из рис. 4, коэффициент когерентности в задачах оценива-



ния стабильности взаимного поведения СП занимает промежуточное положение: он более чувствителен к фазовой расстройке, чем TDS, но менее чувствителен, чем Sync. Однако существенное возрастание разброса его оценок при увеличении значения расстройки, характерное и для метода оценивания стабильности временной задержки TDS, является большим недостатком.

На основании полученных результатов можно утверждать, что использование метода оценивания коэффициента фазовой синхронизации Sync при изучении совместной динамики стохастических случайных процессов рассмотренных типов позволяет получить наиболее достоверные результаты и

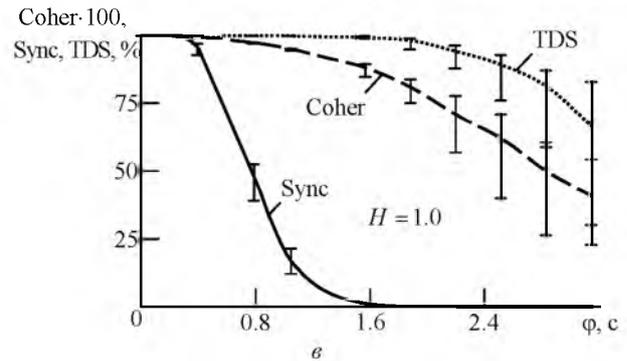


Рис. 4

при исследовании стохастических процессов, принадлежащих к рассмотренным в настоящей статье типам, может оказаться более целесообразным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blood pressure – heart rate synchronization coefficient as a complementary indicator of baroreflex mechanism efficiency / O. A. Markelov, M. I. Bogachev, N. S. Pyko, S. A. Pyko // 2015 XVIII Int. conf. on soft computing and measurements (SCM), 19–21 May 2015, Saint Petersburg. Piscataway: IEEE, 2015. С. 173–175.
2. Systolic Blood Pressure and Pulse Intervals Synchronization / N. S. Pyko, S. A. Pyko, O. A. Markelov, M. I. Bogachev // Proc. of the 2015 IEEE North-West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. (2015ElConRusNW), 2–4 Febr. 2015, Saint Petersburg, Russia, 2015. Piscataway: IEEE, 2015. P. 341–344.
3. Phase Synchronization in a Double-Loop Feedback Model of Blood Pressure Regulation / N. S. Pyko, S. A. Pyko, O. A. Markelov, M. I. Bogachev, O. V. Mamontov // Proc. of the 2016 IEEE North-West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineer-

- ing Conf. (2016 ElConRusNW), 2–3 Febr. 2016, Saint Petersburg. Piscataway: IEEE, 2016. P. 817–821.
4. Network Physiology: How Organ Systems Dynamically Interact / R. P. Bartsch, K. K. L. Liu, A. Bashan, P. Ch. Ivanov // PLOS ONE. 2015. Vol. 10(11). P. e01421435.
5. Два метода оценивания стабильности взаимной динамики физиологических процессов / Н. С. Пыко, С. А. Пыко, О. А. Маркелов, О. В. Мамонтов, Ю. Д. Ульяницкий, М. И. Богачев // Сб. докл. XVIII Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2016), Санкт-Петербург, 25–28 мая 2016. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2016. Т. 1. С. 46–49.
6. Shin K., Hammond J. Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers. Chichester: John Wiley & Sons, 2008. 403 p.
7. Prichard D., Theiler J. Generating Surrogate Data for Time Series with Several Simultaneously Measured Variables // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73, № 7. P. 951–954.

S. A. Pyko, N. S. Pyko, O. A. Markelov, Yu. D. Uljanitski, M. I. Bogachev  
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

## Investigation of Some Methods for Estimating the Mutual Dynamic Stability of Stochastic Processes

*The sensitivity of some methods for estimating the mutual dynamic stability of stochastic processes with given correlative properties was studied in relation to the phase detuning between the processes. Two classes of normally distributed random stochastic processes are considered: the processes with short-term correlation and the processes with a long-term correlation, characterized by the specified Hurst coefficients.*

Phase synchronization coefficient, correlation function, correlation time, Hurst coefficient, coherence function

Статья поступила в редакцию 16 сентября 2016 г.