

Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Статья посвящена 80-летию юбилею факультета радиотехники и телекоммуникаций

УДК 519.872

Научная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2025-28-3-57-72>

Оценка задержек в сетях с согласованной динамикой поступлений

О. А. Маркелов[✉], Н. С. Тымченко, М. И. Богачев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"
им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

[✉] oamarkelov@etu.ru

Аннотация

Введение. Современные сложные системы с сетевой структурой характеризуются пространственно-временной зависимостью потоков. Существующие модели теории массового обслуживания, основанные на предположениях о стационарности и взаимной статистической независимости флуктуаций интенсивности входящих потоков, существенно недооценивают реальные задержки.

Цель работы. Разработка усовершенствованной модели оценки задержек агрегированного трафика в высоконагруженных сетях с учетом статистических характеристик взаимосвязей между флуктуациями активности в узлах и каналах сети.

Материалы и методы. Применен суперстатистический подход для аналитической коррекции формулы Кингмана при оценке времени ожидания на основе вычисления коэффициентов вариации интенсивностей поступления и взаимных корреляций между интенсивностями трафика, сформированного различными узлами. Для оценки характеристик агрегированного трафика использованы аналитически полученные аппроксимации плотностей вероятности распределения задержки q -экспоненциальными распределениями, результаты которых подтверждаются данными имитационного моделирования агрегированного трафика. Дополнительно выполнена валидация предложенных оценок на примере анализа эмпирических данных трафика магистральной академической сети MAWI. Длительность анализируемых временных сегментов трафика была адаптирована для адекватного сравнения результатов для модельных и эмпирических данных, при этом интегральные статистики построены на основе результатов анализа нескольких полносуточных записей.

Результаты. Разработана аналитическая модель для оценки задержек в агрегированном трафике, учитывающая коэффициенты вариации интенсивности поступления и взаимные корреляции интенсивностей трафика, исходящего от различных узлов сети. Показано, что аналитическая оценка распределения задержек дает промежуточный результат между оценками, получаемыми при использовании двух схем моделирования. Это обусловлено преобладанием ошибок дискретности или конечности выборки данных в зависимости от схемы моделирования.

Заключение. Применение суперстатистического подхода для учета статистических взаимосвязей позволяет уточнить оценки времен запаздывания в высоконагруженных сетях на основе подстановки скорректированных характеристик агрегированного трафика в формулу Кингмана, что позволяет уточнить оценки задержек в сложных технических системах с сетевой структурой.

Ключевые слова: нестационарный интернет-трафик, системы массового обслуживания, суперстатистический подход, взаимно коррелированные интенсивности поступления, время запаздывания

Для цитирования: Маркелов О. А., Тымченко Н. С., Богачев М. И. Оценка задержек в сетях с согласованной динамикой поступлений // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2025. Т. 28, № 3. С. 57–72.

doi: 10.32603/1993-8985-2025-28-3-57-72

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Источник финансирования. Данное исследование было поддержано Министерством науки и высшего образования (задание № FSEE-2025-0006).

Статья поступила в редакцию 02.04.2025; принята к публикации после рецензирования 12.05.2025; опубликована онлайн 30.06.2025



Delay Estimation in Networks with Cooperative Arrival Dynamics

Oleg A. Markelov[✉], Nikita S. Tymchenko, Mikhail I. Bogachev

Saint Petersburg Electrotechnical University, St Petersburg, Russia

✉ oamarkelov@etu.ru

Abstract

Introduction. Modern complex systems with a network structure are characterized by spatial and temporal long-term dependence of flows. The existing models of mass service theory based on the assumptions of stationarity and mutual statistical independence of fluctuations in the intensity of incoming flows significantly underestimate real delays.

Aim. Development of an improved model for estimation of aggregated traffic delays in highly loaded networks taking into account statistical characteristics of interrelations between activity fluctuations in nodes and channels of the network.

Materials and methods. A superstatistical approach is applied to analytically correct the Kingman formula for estimating the waiting time based on the calculation of the coefficients of variation of arrival intensities and mutual correlations between the intensities of the traffic generated by different nodes. Analytically obtained approximations of probability densities of delay distribution by q -exponential distributions are used to estimate the characteristics of aggregated traffic, the results of which are confirmed by the data of simulation modeling of aggregated traffic. In addition, the validation of the proposed estimations is performed on the example of analyzing empirical traffic data of the MAWI academic backbone network. The duration of the analyzed time segments of the traffic was adapted to adequately compare the results for model and empirical data, with integral statistics constructed based on the results of the analysis of several full-day records.

Results. An analytical model for estimating delays in aggregated traffic was developed, taking into account the coefficients of variation of arrival intensities and mutual correlations of traffic intensities originating from different nodes in the network. The analytical estimation of delay distribution was shown to give an intermediate result between the estimations obtained by using two modeling schemes, which is caused by the prevalence of errors of discreteness or finiteness of data sampling depending on the modeling scheme.

Conclusion. The application of the superstatistical approach to account for statistical interrelationships allows the estimates of delay times in highly loaded networks to be clarified on the basis of substituting the adjusted characteristics of aggregated traffic into the Kingman formula, thus providing more detailed estimates of delays in complex engineering systems with a network structure.

Keywords: non-stationary Internet traffic, queuing systems, superstatistical approach, mutually correlated arrival rates, delay time

For citation: Markelov O. A., Tymchenko N. S., Bogachev M. I. Delay Estimation in Networks with Cooperative Arrival Dynamics. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2025, vol. 28, no. 3, pp. 57–72.

doi: 10.32603/1993-8985-2025-28-3-57-72

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Source of funding. This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education (assignment number FSEE-2025-0006).

Submitted 02.04.2025; accepted 12.05.2025; published online 30.06.2025

Введение. Многопользовательские информационные системы играют ключевую роль в современном мире, при этом одной из главных проблем становится время запаздывания при передаче данных. Задержки пакетов включают

постоянную и переменную составляющие, среди которых особое значение имеет задержка маршрутизации. Для оптимизации работы телекоммуникационных систем применяется теория массового обслуживания, анализирующая эф-

фективность систем массового обслуживания (СМО). Этот подход, основанный на моделировании очередей, применяется в различных областях, подчеркивая его универсальность.

Математические модели СМО успешно применяются уже более века, начиная с работ Эрланга [1]. Дальнейшие исследования Поллачека, Хинчина, Кингмана, Маршала, Крамера и Лангенбаха–Бельца [2–6] развивали модели СМО, опираясь при этом на базовое допущение о статистической независимости поступающих требований. Современные исследования указывают на чрезмерную упрощенность данного предположения, что приводит к ошибкам в оценке характеристик сложных сетей [7–10]. В связи с этим растет потребность в разработке новых аналитических и имитационных методов, которые учитывали бы флуктуации интенсивностей поступлений, в том числе авто- и взаимные корреляционные свойства их интенсивностей на различных узлах – источниках трафика [15–19].

Отход от допущения о независимости проявляется возрастающими флуктуациями агрегированного трафика и временной кластеризацией поступлений в нем, что, в свою очередь, приводит к увеличению задержек, которые не учитываются классическими моделями СМО [20, 21]. Современные методы статистического анализа, компьютерного моделирования и хеширования данных позволяют оценить вклад взаимных корреляций и получить параметры соответствующей статистической модели [22–25].

В статье представлены результаты аналитической оценки характеристик эффективности СМО на основе суперстатистического подхода, учитывающего как краткосрочную динамику на основе классических моделей СМО с пуассоновскими в локальных временных сегментах потоками, так и долговременные флуктуации интенсивности поступлений с использованием недавно предложенных авторами расчетных схем [11–14]. В указанных работах выполнена оценка влияния долговременной динамики флуктуаций и предложены поправки к оценкам длин очередей и времен ожидания на основе анализа интервальных распределений [26]. В свою очередь, в описываемой работе основное внимание уделяется расширению вышеупомянутого подхода для случая учета взаимных корреляций между мо-

делями активности в различных узлах – источниках трафика. Показано, как флуктуации интенсивностей поступлений в отдельных узлах трансформируются в параметры времен ожидания в агрегированных распределениях трафика.

Теоретическое обоснование. Простейшая классическая модель СМО характеризуется детерминированным временем между поступлениями τ и постоянной продолжительностью обслуживания $T_{обс}$. В рамках этой схемы при известном τ достаточно поддерживать $T_{обс}$ несколько меньшим ($T_{обс} \lesssim \tau$ для одноканальной СМО или $T_{обс} \lesssim k\tau$ для многоканальной СМО с k каналами), чтобы избежать ожидания обслуживания. Этот сценарий D/D/k по Кендаллу [28] применим только к простым процессам, например таким, как производство идентичных деталей или передача по каналу связи стандартных сообщений фиксированной длины.

Если в многопользовательских сетях динамика поступлений определяется не заданным производственным регламентом или алгоритмом распределения вычислительных задач, а совместным поведением большого количества людей, время между прибытиями τ в общем случае оказывается случайной величиной. Это приводит к возникновению очередей при малых интервалах между поступлениями даже при достаточной в среднем пропускной способности системы. Таким образом, времена ожидания $T_{оч}$ и обслуживания $T_{обс}$ в этих случаях также оказываются случайными величинами. В рамках допущений, сформулированных Эрлангом [1], процессы поступления и обслуживания описываются стационарными пуассоновскими потоками с экспоненциальными распределениями, каждое из которых имеет единственный свободный параметр – интенсивности поступления и обслуживания соответственно. Тогда в k -канальной СМО, каналы которой для равномерности загрузки работают поочередно, время между поступлениями для каждого отдельного канала описывается распределением Эрланга порядка k . Его обобщением является гамма-распределение (Γ -распределение), которое при больших k асимптотически стремится к гауссовскому.

Дальнейшие теоретические обобщения в основном рассматривали случаи неэкспоненциальных распределений времен между поступлениями и длительностей обслуживания. Это соответствует обобщенной модели $G/G/k$ [2–4], в рамках которой τ и $T_{\text{обс}}$ характеризуются помимо средних значений их дисперсиями. При фиксированной пропускной способности узла с время обслуживания $T_{\text{обс}} = v/c$ линейно зависит от объема передаваемых данных v . В связи с этим флуктуации $T_{\text{обс}}$ прямо пропорциональны флуктуациям v , которые для обеспечения масштабируемости модели обычно нормируются к их средним значениям, и в рамках формализованного описания используют коэффициенты вариации ρ_τ и ρ_v . Хотя были предложены расширенные модели распределений времени поступления и обслуживания [5, 6], они либо игнорировали временные и пространственные модели памяти, либо упрощали их до схем, учитывающих только кратковременную динамику поступлений [15–19].

В современных информационных сетях, особенно на базе 5G и промышленного IoT, важна реализация концепции эффективной общей пропускной способности. Эти сети часто являются программно-определяемыми (SDN) [29], где активность узлов и маршруты передачи определяются адаптивно к текущим услови-

ям в сети на прикладном уровне TCP/IP. Таким образом, при моделировании SDN целесообразно анализировать агрегированный поток трафика как с переменной интенсивностью поступления требований, так и с переменной пропускной способностью канала обслуживания. Обе характеристики описываются случайными процессами. В некотором приближении модели можно упростить, полагая источники вариации интенсивности входного потока и пропускной способности канала обслуживания независимыми. Поскольку задержки в системе определяются суммарной дисперсией (в нормированном выражении – суммарным коэффициентом вариации), для рассмотренных ранее допущений они будут определяться суммой коэффициентов вариации, характеризующих неравномерность потока входящего трафика и неравномерность потока обслуживания в агрегированном канале с переменной эффективной пропускной способностью [27].

Рассмотрим простую сеть с N узлами, подключенными к агрегированному каналу с ограниченной пропускной способностью с (например, LAN с подключением к ISP), показанную на рис. 1.

После агрегирования трафика модель сводится к СМО типа $G/G/1$ со случайными интервалами времени между поступлениями, каждый из которых характеризуется временем

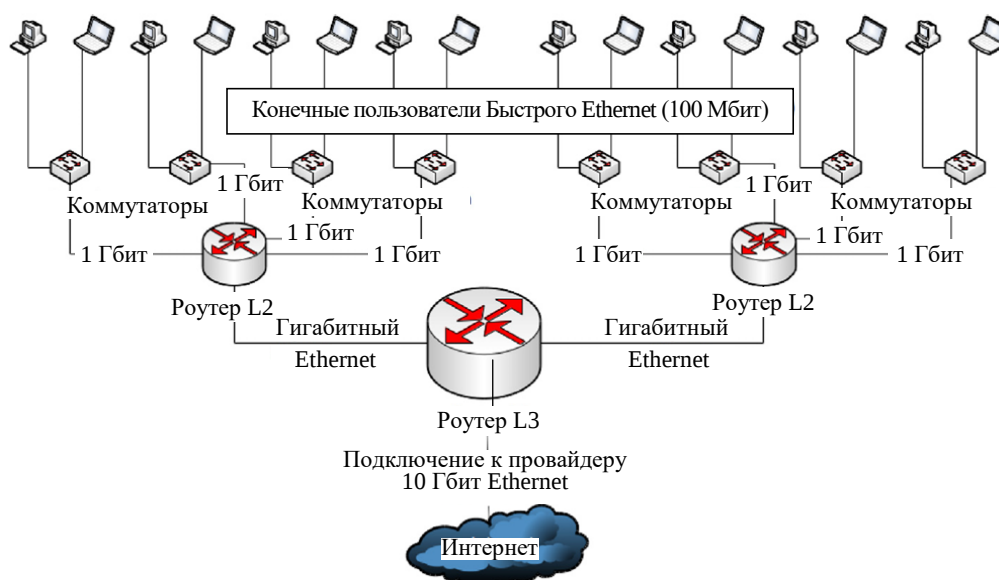


Рис. 1. Типичный пример топологии локальной вычислительной сети "звезда"

Fig. 1. A typical example of a star local area network topology

прибытия t_i и размером v_i . Последний пропорционален времени обслуживания: $T_{обс_i} = v_i/c$ (рис. 2, а). На рис. 2, б показаны временные диаграммы нахождения в СМО первых 10 поступлений, где время ожидания $T_{ож}$ в общем случае состоит из времени ожидания в очереди $T_{оч}$ и времени обслуживания $T_{обс}$ соответственно. В вырожденном случае, когда канал связи оказывается свободен в момент поступления (пример – первое и пятое поступления на рис. 2), $T_{оч} = 0$ и, следовательно, $T_{ож} = T_{обс}$.

Для k -го поступления время ожидания в очереди до момента начала обслуживания можно оценить как

$$T_{оч_k} = T_{ост} + \sum_{l=1}^L T_{обс_{k-l}},$$

где $T_{ост}$ – оставшееся время, необходимое для

завершения текущего обслуживания, выполняемого в момент поступления; L – длина очереди на момент поступления. Аналогично, время ожидания от поступления до завершения обслуживания:

$$T_{ож_k} = T_{оч_k} + T_{обс_k} = T_{ост} + \sum_{l=0}^L T_{обс_{k-l}}.$$

Согласно закону Литтла [30] среднее время ожидания $\langle T_{оч} \rangle$ пропорционально средней длине очереди $\langle L \rangle$, и, таким образом, в среднем

$$\langle T_{оч} \rangle = \langle T_{ост} \rangle + \langle T_{обс} \rangle \langle L \rangle = \langle T_{ост} \rangle + \langle T_{оч} \rangle U.$$

Тогда среднее время ожидания

$$\langle T_{оч} \rangle = \frac{\langle T_{ост} \rangle}{1 - U},$$

где $U = c/c_0$ – коэффициент использования канала в предположении, что $c_0 = \sum_i v_i / T_\Sigma$ –

минимальная пропускная способность, необхо-

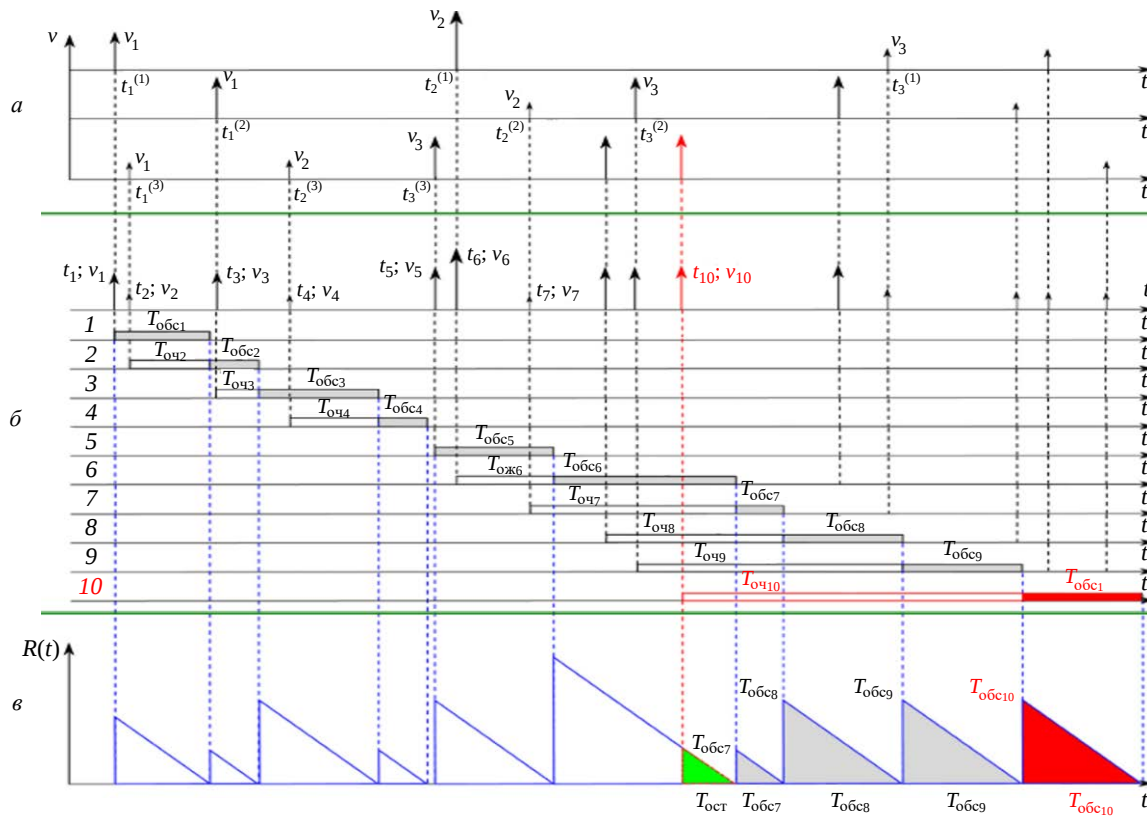


Рис. 2. Схема агрегирования трафика: а – поступления из трех различных узлов; б – в агрегированном канале поступления обслуживаются либо сразу (например, первое и пятое), либо ожидают в очереди до начала обслуживания; в – иллюстрация процедуры оценки времени ожидания при условии прибытия в случайное время

Fig. 2. Traffic aggregation scheme: а – arrivals from three different nodes; б – aggregated incoming requests are either served immediately (example one and five) or queued for service; в – an illustration of the waiting time estimation procedure assuming arrival at a random time

димая для передачи всего объем трафика $\sum_i v_i$

за все время анализа T_Σ .

В свою очередь, полагая поступления происходящими в случайные моменты времени, $T_{\text{ост}}$ можно определить, вычислив математическое ожидание остаточного времени $R(t)$, которое следует за процессом обновления, представленным последовательностью функций, линейно убывающих от $T_{\text{обс}_i}$ в начале обслуживания i -го поступления до нуля в момент его завершения (рис. 2, в), следующим образом:

$$\langle T_{\text{ост}} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t R(t') dt' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{L(t)} \frac{T_{\text{обс}_i}^2}{2} = \frac{L(t)}{2t} \sum_{i=1}^{L(t)} \frac{T_{\text{обс}_i}^2}{L(t)}.$$

Поскольку при $t \rightarrow \infty \frac{L(t)}{t} \rightarrow Y$, где Y – средняя интенсивность поступлений,

$$\frac{L(t)}{t} \sum_{i=1}^{L(t)} \frac{T_{\text{обс}_i}^2}{L(t)} = E(T_{\text{обс}}^2).$$

Здесь $E(\dots)$ – математическое ожидание. Тогда окончательно имеем

$$\langle T_{\text{ост}} \rangle = Y \frac{E(T_{\text{обс}}^2)}{2}$$

и, таким образом, [31]

$$T_{\text{оч}} = \frac{YE(T_{\text{обс}}^2)}{2(1-U)}. \quad (1)$$

Выражение (1), широко известное как формула Поллачека–Хинчина для времени ожидания, предполагает стационарные случайные поступления, но переменное время обслуживания $M/G/1$ [2, 3]. Его также можно переписать в виде

$$\langle T_{\text{оч}} \rangle = \frac{1}{\langle T_{\text{обс}} \rangle} \frac{U}{1-U} \frac{E(T_{\text{обс}}^2)}{2}.$$

Наконец, можно избежать прямого вычисления второго момента $E(T_{\text{обс}}^2)$, заменив его на квадрат коэффициента вариации $\rho_v^2 = \frac{E(T_{\text{обс}}^2)}{E^2(T_{\text{обс}})} = \frac{E(v^2)}{E^2(v)}$, приведя выражение к виду

$$\langle T_{\text{оч}} \rangle = \langle T_{\text{обс}} \rangle \frac{U}{1-U} \frac{\rho_v}{2} = \frac{\langle v \rangle}{c} \left[\frac{U}{1-U} \right] \left[\frac{\rho_v^2}{2} \right].$$

Рассмотрим случай непуассоновских поступлений, время между которыми описывается некоторым обобщенным распределением с двумя свободными параметрами. Считая, что флуктуации временных интервалов между поступлениями и времен обслуживания статистически независимы, т. е. суммарная дисперсия равна сумме дисперсий, и то же самое верно для квадратов коэффициентов вариации, приходим к известной формуле Кингмана [4]

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{оч}} \rangle &\approx \frac{\langle v \rangle}{c} \left[\frac{U}{1-U} \right] \left[\frac{\rho_\tau^2 + \rho_v^2}{2} \right] = \\ &= \frac{\langle v \rangle}{c_0} \left[\frac{U^2}{1-U} \right] \left[\frac{\rho_\tau^2 + \rho_v^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_τ и ρ_v – коэффициенты вариации временных интервалов между поступлениями и длительностей обслуживания соответственно.

Формула (2) показывает, что время ожидания определяется тремя факторами: фиксированным множителем, зависящим от среднего времени обслуживания $\langle T_{\text{обс}} \rangle = \langle v \rangle / c$; множителем, связанным с коэффициентом использования канала $U/(1-U)$, и множителем, характеризующим интенсивность флуктуаций характеристик трафика $(\rho_\tau^2 + \rho_v^2)/2$. При этом задержки определяются исключительно суммарной дисперсией, в которую входят как характеристики входного потока, связанные с нерегулярным обращением пользователей к сетевым ресурсам, так и обусловленные возможной нестабильностью со стороны системы обслуживания.

Аналитический подход. Теперь предположим, что трафик, генерируемый узлами, подключенными к одному агрегированному каналу с ограниченной пропускной способностью c , имеет взаимные корреляции, характеризующиеся корреляционной матрицей $R = [R_{ij}]$. Суммарная интенсивность трафика $Y = Y_0 + Y_{\text{фл}}$, где $Y_0 = C$ – стационарный пуассоновский поток с фиксированной интенсивностью, а $Y_{\text{фл}}$ характе-

ризует случайные флуктуации вокруг Y_0 с коэффициентом вариации σ/C .

Положим интенсивность трафика Γ -распределенной:

$$P(Y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} Y^{\alpha-1} \exp(-\lambda Y),$$

где λ – параметр интенсивности; α – параметр формы; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция. Тогда средняя интенсивность поступления $\langle Y \rangle = \alpha/\lambda$; ее дисперсия $\sigma_Y^2 = \alpha/\lambda^2$. Соответственно, параметр формы $\alpha = 1/(\sigma_Y/\langle Y \rangle)^2 = 1/\rho^2$, определяющий асимптотический спад распределения, зависит только от коэффициента вариации $\rho = \sigma_Y/\langle Y \rangle$, а параметр интенсивности $\lambda = \alpha/\langle Y \rangle$ отвечает за изменение масштаба распределения к заданной средней интенсивности поступления $\langle Y \rangle$.

Согласно формуле полной вероятности

$$P(\tau) = \int_0^\infty P(Y) P(\tau|Y) dY = \int_0^\infty P(Y) Y e^{-Y\tau} dY,$$

где $Y = 1/\langle \tau \rangle$ – локальная интенсивность для каждого временного фрагмента, достаточно короткого, чтобы полагать трафик в его пределах стационарным; $\langle \tau \rangle$ – локальное среднее время между поступлениями для каждого такого фрагмента. Здесь $P(\tau \vee Y) = Y e^{-Y\tau}$ обозначает условную вероятность наблюдения времени между поступлениями τ в пределах фрагмента с локальной интенсивностью Y .

Тогда предельное распределение времени поступления [12]

$$P(\tau) = C_0 [1 + b(q-1)\tau]^{-1/(q-1)}, \quad (3)$$

где $b = \frac{Y}{3-2q} = \frac{\alpha+2}{\lambda}$; $q = 1 + \frac{1}{\alpha+2} = \frac{\alpha+3}{\alpha+2}$;

$$C_0 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Выражение (3) известно как q -экспоненциальное распределение и представляет собой подкласс обобщенных распределений Парето. Для $q=1$ q -экспоненциальное распределение

сводится к простому экспоненциальному распределению.

Математическое ожидание и дисперсия определены для $q < 3/2$ и $q < 4/3$ соответственно:

$$E(\tau) = \frac{1}{b(3-2q)};$$

$$D(\tau) = \frac{q-2}{(2q-3)^2(3q-4)b^2}.$$

С учетом того, что $\alpha = 1/\rho^2$, квадрат коэффициента вариации

$$\begin{aligned} \rho_\tau^2 &= \frac{D(\tau)}{E^2(\tau)} = \frac{(q-2)b^2(3-2q)^2}{(2q-3)^2(3q-4)b^2} = \\ &= \frac{q-2}{3q-4} = \frac{-\rho^2-1}{\rho^2+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Это справедливо для $q = \frac{1+3\rho^2}{1+2\rho^2} < \frac{4}{3} \rightarrow \rho^2 < 1$.

Пусть интенсивность агрегированного трафика Y получается сложением вкладов трафика от N узлов. Для упрощения допустим, что вклад всех узлов в общую интенсивность трафика одинаков, а флуктуации трафика от отдельных узлов эквикоррелированы. Тогда, согласно [32], можно выразить математическое ожидание и дисперсию через функцию генерации момента, которая для произвольного $f(N)$ определяется как

$$E_N(f(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) P(N=n).$$

Получаем:

$$\varphi''(0) = E(N^2);$$

$$D(N) = E(N^2) - E^2(N) = \varphi''(0) - (\varphi'(0))^2.$$

Полагая, что

$$E(X_i|N) = e^{g+hN};$$

$$D(X_i|N) = e^{a+tN},$$

имеем

$$E(Y) = e^g \varphi'(h);$$

$$D(Y) = e^a \left\{ \varphi'(t) + E_N \left(R(N^2 - N) e^{tN} \right) \right\} + \\ + e^{2g} \varphi''(2h) - e^{2g} (\varphi'(2h))^2,$$

где φ, g, h, a, t – вспомогательные функции для моментогенерирующего разложения.

Для эвкоррелированного сценария $R = [r_{ij}] = R_0, i \neq j$ получим [32]

$$D(S) = e^a \left\{ (1 - R_0) \varphi'(t) + R_0 \varphi(t) \right\} + \\ + e^{2g} \varphi(2h) - e^{2g} (\varphi'(h))^2,$$

и тогда

$$\rho^2 = \frac{D(S)}{E^2(S)} = \\ = e^{a-2g} \frac{(1 - R_0) \varphi'(t) + R_0 \varphi''(t)}{(\varphi'(h))^2} + \frac{\varphi''(2h)}{(\varphi'(h))^2} - 1.$$

Наконец, подставив

$$E(S) = E(Y_k) E_N(N); \\ D(S) = D(Y_k)(1 - R_0) E_N(N) + \\ + D(Y_k) R_0 E_N(N^2) + (E(Y_k))^2 D_N(N),$$

с учетом того, что количество узлов не изменяется, т. е. $E_N(N) = N$ и $D_N(N) = 0$, получим

$$\rho^2 = \frac{D(S)}{E^2(S)} = \frac{D(Y_k)(1 - R_0)}{E^2(Y_k) E_N(N)} + \\ + \frac{D(Y_k) R_0 E_N(N^2)}{E^2(Y_k) (E_N(N))^2} + \frac{D_N(N)}{(E_N(N))^2} = \\ = \frac{ND(Y_k)(1 - R_0)}{N^2 E^2(Y_k)} + \frac{D(Y_k) R_0 N^2}{N^2 E^2(Y_k)} = \\ = \frac{D(Y_k)(NR_0 + 1 - R_0)}{NE^2(Y_k)}. \quad (5)$$

Приведенное выше выражение справедливо для

$$\rho^2 < 1 = \frac{D(X_1)(NR_0 + 1 - R_0)}{NE^2(X_1)} < 1 = \\ = \rho_1^2 = \frac{D(X_1)}{E^2(X_1)} < \frac{N}{NR_0 + 1 - R_0}.$$

Чтобы применить полученный выше результат на практике, необходимо вначале рас-

считать ρ^2 из (5) и подставить его в (4), чтобы получить ρ_τ^2 . Наконец, значение ρ_τ^2 , полученное из (4), можно использовать для оценки времени ожидания в соответствии с (2) – формулой Кингмана.

Имитационное моделирование. Для проверки точности описанной аналитической модели в различных ситуациях была разработана математическая модель, генерирующая потоки интенсивностей трафика с заданными корреляционными свойствами (рис. 3). Было реализовано 2 варианта процедуры моделирования взаимно коррелированных интенсивностей: 1) отдельные пуассоновские потоки с переменной интенсивностью имитируются для каждого из N узлов независимо, а затем агрегируются и располагаются в соответствии с временами прибытия по возрастанию; 2) интенсивности трафика от всех узлов складываются для получения ряда агрегированной интенсивности, после чего моделируется единый агрегированный пуассоновский поток. В дальнейшем каждый из вариантов агрегированного потока подается на вход модели СМО (см. рис. 2) для получения показателей $T_{\text{обс}}, T_{\text{оч}}, T_{\text{ож}}$, которые в дальнейшем сопоставляются с полученными ранее аналитическими оценками.

Вначале формируется ряд интенсивностей $Y = Y_0 + Y_{\text{фл}}$, где $Y_0 = C$ – постоянная составляющая, а $Y_{\text{фл}}$ – флуктуационная составляющая с нулевым средним.

Для разных комбинаций параметров модели, таких, как N – количество узлов; C – средняя интенсивность; ρ – коэффициент вариации; R_0 – взаимные корреляции, были сформированы V случайных реализаций ряда интенсивностей для различных длительностей сегментов L . Чтобы сопоставление данных имитационного моделирования с результатами анализа эмпирических данных было более адекватным, длительность сегментов выбиралась таким образом, чтобы общая статистика оставалась такой же, как и для полной суточной записи трафика из сети с таким же количеством активных узлов, т. е. $LV \approx 86\,400$.

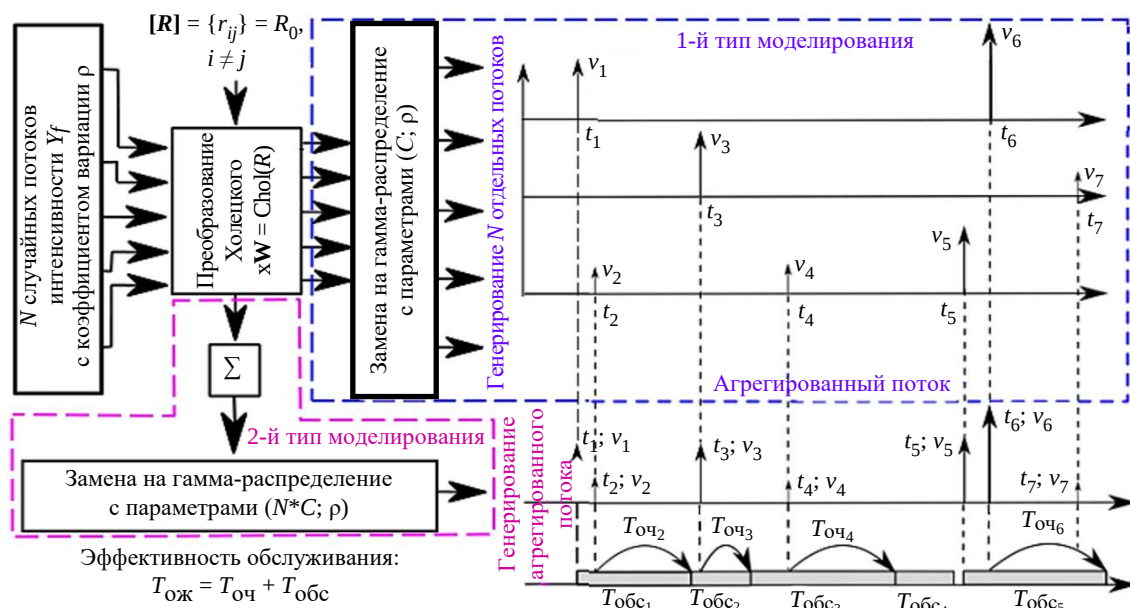


Рис. 3. Схема процедуры моделирования взаимно коррелированных интенсивностей

Fig. 3. Procedure for modeling the correlated traffic flow

Имитационное моделирование потока требований предполагало формирование в каждом из временных сегментов локальных пуассоновских потоков, состоящих из Y_k элементов со средним интервалом $1/Y_k$ и состыкованных последовательно для всех сегментов $k = 1 \dots L$. Сформированный таким образом ряд поступлений был использован в качестве входных данных для стандартной процедуры моделирования СМО, описанной, например, в [12, 26]. Были рассмотрены 2 варианта моделирования: (имит. 1) с пуассоновскими потоками, формируемыми для каждого из узлов независимо, с последующим их объединением и расположением в соответствии со временем прибытия, а также (имит. 2) с объединением локальных интенсивностей трафика из узлов с последующим моделированием единого агрегированного пуассоновского потока (детальная иллюстрация обоих сценариев моделирования представлена на рис. 3). Моделирование выполнялось в среде MATLAB для параметров $N = 4, 16, 64$; $C = 10, 100, 1000$; $V = 100, 1000, 5760$; $L = 15, 86, 860$; $\rho = 0.1, 0.5, 0.9$; $R_0 = 0.1, 0.5, 0.9$. Показательные примеры результатов моделирования приведены на рис. 4–6, где соответствующие наборы параметров моделирования отражены в заголовках панелей рисунков.

В ходе математического моделирования строились графики плотности вероятности оценки времени запаздывания $P(\tau)$, учитывая физическое ограничение на время запаздывания от $45 \cdot 10^{-6}$ до 2.7 с.

На рис. 4 показаны распределения $P(\tau)$ времени между поступлениями τ в сети с $N = 16$ активными узлами со средней интенсивностью $C = 100$ требований в единицу времени, длительностью $L = 86$ временных сегментов, со статистикой, собранной для $V = 1000$ случайных реализаций интенсивности. Боксовыми диаграммами представлены результаты моделирования, тогда как красными штрихпунктирными линиями показаны результаты аналитических расчетов по вышеописанной методике. Черной штриховой линией выделен вырожденный вариант, соответствующий приближенному описанию рассматриваемого сценария в терминах классических моделей СМО.

Из рисунка видно, что все варианты имитационного моделирования подвержены влиянию эффектов дискретности и конечности объема выборки, причем вариант имит. 1 представляет собой верхнюю, а вариант имит. 2 – нижнюю границы соответственно. При этом аналитическая кривая типично лежит между ними, с более выраженным отклонением от единичной

экспоненты с увеличением ρ и R_0 , которое в большей степени зависит от ρ .

Для моделирования требовалось подобрать набор оптимальных параметров, которые бы минимизировали влияние артефактов. В ходе исследования было установлено, что математическая модель демонстрирует инерционность в пределах одного интервала и уменьшение длины интервала L приводит к более прямому графику. При этом значение τ также уменьшается, так как тяжесть хвоста гамма-распределения зависит от L .

Это устраняет провал в графике $P_{\text{имит.1}}(\tau)$.

Увеличение числа пользователей приводит к смещению графиков вправо по оси τ и лучшему описанию с помощью q -экспоненты вместо обычной экспоненты, что соответствует теории, так как модель разрабатывается для многопользовательской высоконагруженной сети.

В [27] показано, что с ростом N экспонента недооценивает время на порядок. Графики $P_{\text{имит.2}}(\tau)$, напротив, смещаются влево при увеличении N и почти совпадают с экспонентой. При малых N оба метода агрегирования дают схожие результаты.

Далее было построено семейство графиков оценки времени запаздывания по уточненной формуле Кингмана при тех же параметрах моделирования (рис. 5).

Контурные и заполненные боксовые диаграммы представляют результаты компьютерного моделирования по вариантам имит. 1 и имит. 2 соответственно. Штриховыми линиями показана аппроксимация по формуле Кингмана (2) с учетом аналитических поправок к коэффициенту вариации интервалов времен ρ_t^2 в зависимости от взаимных коррелирующих интенсивностей из разных узлов, определяемых согласно предложенной ранее аналитической коррекции.

Видно, что формула Кингмана хорошо работает для малых ρ , а при высоких значительно недооценивает задержки уже при $U = 0.4$, а при меньших U переоценивает.

Второй метод агрегирования (имит. 2) хорошо согласуется с теорией при больших значениях ρ и высоких значениях N вплоть до больших нагрузок.

Первый метод начинает расходиться при высоких значениях N и малых значениях U из-за конечности выборки и дискретности. При $L \rightarrow 1$ оба

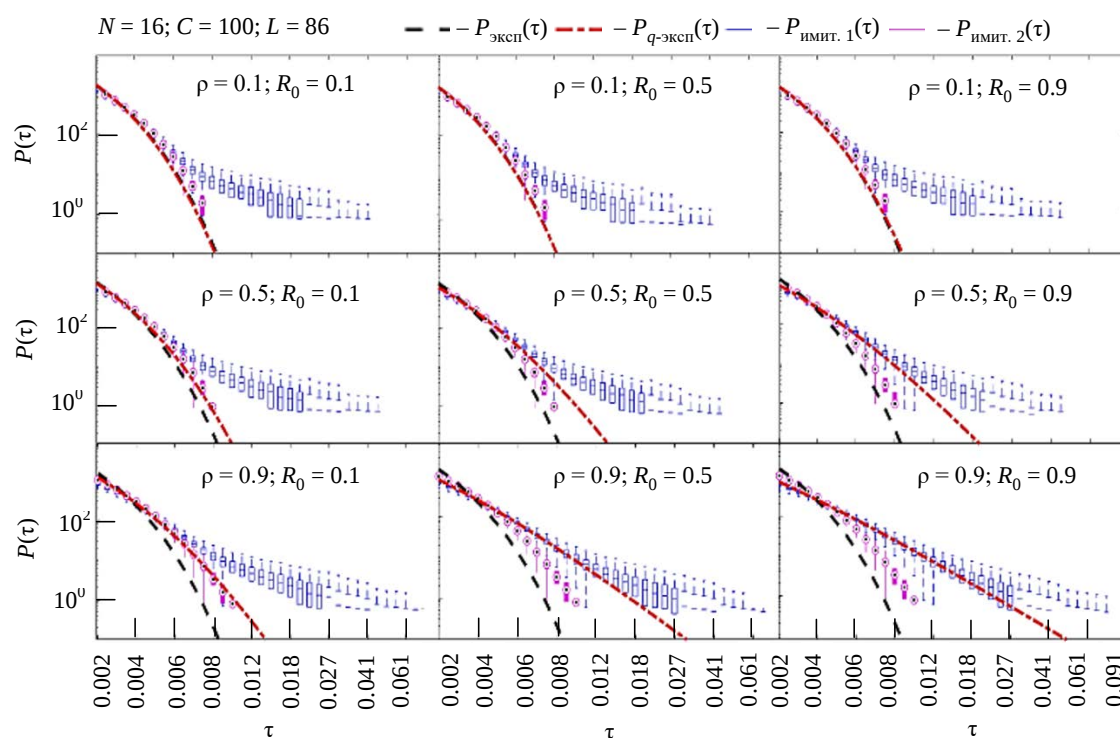


Рис. 4. Семейство графиков зависимости плотности вероятности оценки времени запаздывания от ρ и R_0

Fig. 4. Family of plots of dependence of probability density function of lag time estimation on ρ and R_0

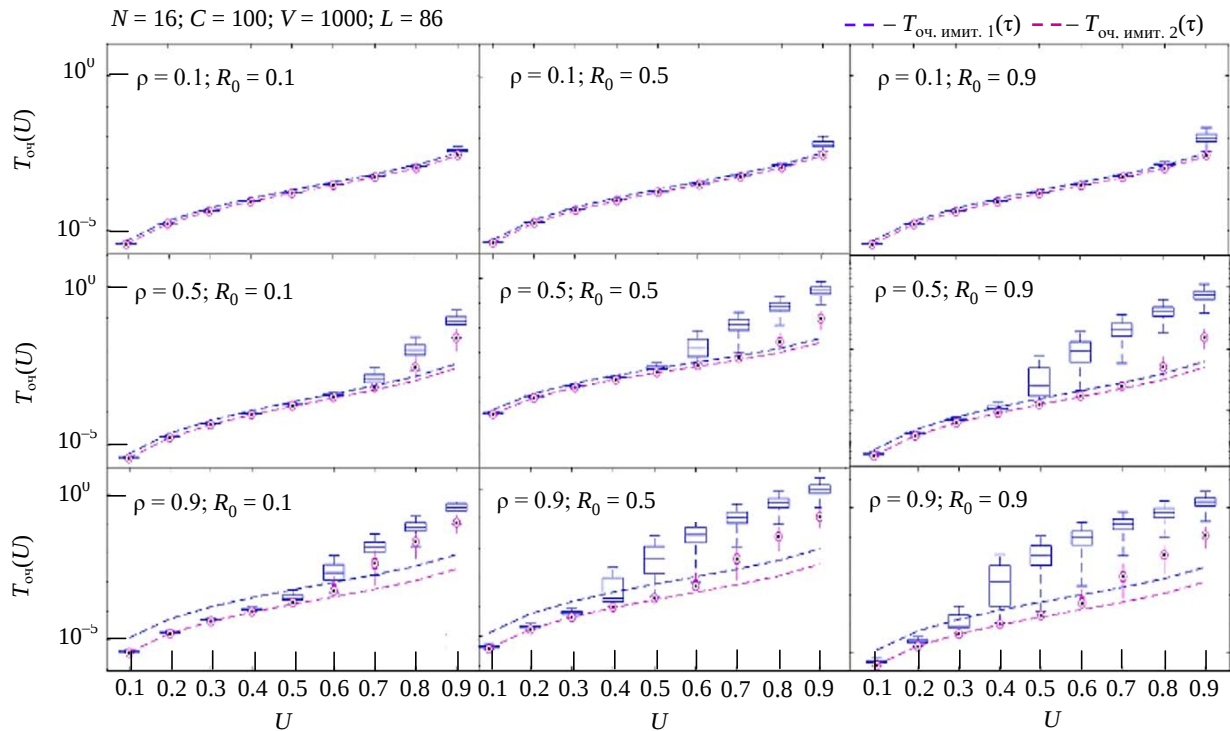


Рис. 5. Семейство графиков зависимости оценки времени запаздывания по уточненной формуле Кингмана от ρ и R_0
Fig. 5. Family of plots of dependence of lag time estimation by the refined Kingman formula on ρ and R_0

метода хорошо согласуются с теорией, но разница в оценке времени ожидания составляет порядок.

Результаты моделирования для экикоррелированных потоков трафика с постоянными интенсивностями и унифицированными моделями его флуктуаций могут показаться нереалистичными, так как в больших сетях распределения интенсивностей в узлах типично описываются распределениями с тяжелыми хвостами [13]; кроме того, наблюдается инерционность флуктуаций трафика, что выражается в автокорреляциях его интенсивностей [26].

Оценка времени запаздывания в сети MAWI. Для оценки применимости полученных аналитических поправок к анализу трафика в реальных сетях авторы проанализировали эмпирические данные трафика из сети MAWI, соединяющей университеты и исследовательские центры в Японии. Использовались суточные записи интенсивности трафика. Для имитационного моделирования они были разделены на временные сегменты разной продолжительности. Влияние инерционных свойств интенсивности трафика было исключено за счет случайной перестановки интенсивностей во времени синхронно для всех узлов – источников трафика. Это позволило со-

хранить их взаимные корреляции [27]. Для этого были синтезированы случайные ряды длины L , далее отсортированные для получения V независимых индексных векторов. Затем соответствующие векторы использовались в процедуре перестановки для сохранения взаимных корреляций между рядами интенсивностей трафика. При этом для каждой серии моделирования один и тот же вектор применялся ко всем рядам интенсивностей для всех узлов – источников трафика.

На рис. 6 контурные и заполненные боксовые диаграммы соответствуют двум вариантам схемы моделирования, в которых интенсивности либо моделируются (имит.), либо получены из эмпирических записей трафика сети MAWI (эмп.). На рис. 6, а, б красные штрихпунктирные кривые соответствуют аналитическим приближениям для ρ_τ согласно уравнению (2). Штриховые линии на рис. 6, в, г иллюстрируют аппроксимацию по формуле Кингмана (2) с соответствующими аналитическими поправками к коэффициенту вариации интервалов времени между запросами.

Рис. 6 демонстрирует, что для рассматриваемой ранее комбинации параметров модели

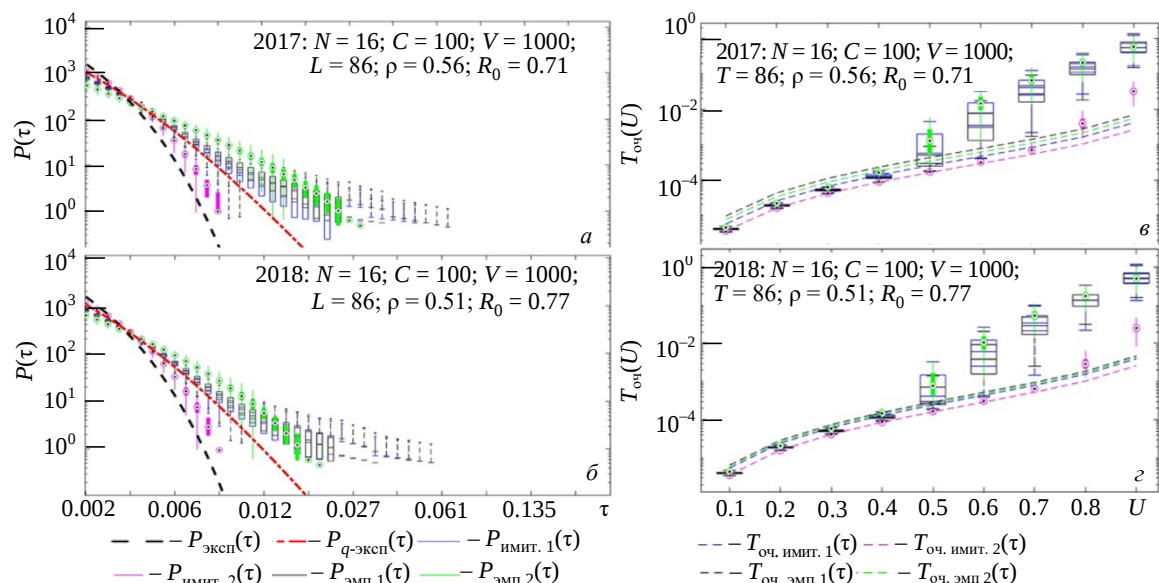


Рис. 6. Семейство графиков зависимости плотности вероятности оценки времени запаздывания (а, б); семейство графиков зависимости оценки времени запаздывания по уточненной формуле Кингмана (в, г)

Fig. 6. Family of plots of dependence of probability density function of lag time estimation (a, b); family of plots of dependence of lag time estimation by the refined Kingman formula (c, d)

предложенные аналитические приближения с коэффициентами вариации времен поступлений, введенными в формулу Кингмана (2), обеспечивают разумные приближения, хотя коэффициенты их вариации ρ и взаимные корреляции R_0 в эмпирических моделях соответствуют параметрам аналитической и математической модели только в среднестатистическом смысле.

Обсуждение. Современные сложные сети, включая информационно-телекоммуникационные, транспортно-логистические и иные сложные технические системы с сетевой структурой, характеризуются многоуровневой иерархией и взаимосвязями. Традиционные пуассоновские модели оказываются неадекватными для описания таких сетей, в частности, из-за нерегулярного характера обращения пользователей к сетевым ресурсам, а также возрастающего влияния динамики автономных агентов, например IoT-устройств.

При этом выбор подходов к аналитическому описанию и имитационному моделированию трафика во многом определяется спецификой поставленных задач. Так, суперстатистические модели обеспечивают уточненные оценки задержек, уменьшая их недооценку по сравнению с классическими моделями с 3–4 порядков до менее чем одного порядка. Однако они

предоставляют только интегральные оценки для агрегированного трафика, опосредованные от специфики внутренней организации сети. Для перспективных сетей необходимо разработать методы оценки задержек на основе ограниченного набора параметров: количества активных узлов, коэффициентов вариации скорости передачи данных (ρ), показателя Херста (H) и матриц взаимных корреляций ($R = [r_{ij}]$).

В больших сетях узкие места возникают на определенных уровнях агрегации при одновременной активности множества узлов. Модель может быть параметризована с использованием средних значений: среднего коэффициента вариации ρ , среднего показателя Херста H и среднего коэффициента взаимной корреляции r_{ij} . Для сетей с низкой интенсивностью потоков трафика отдельных узлов часто целесообразно использовать On/Off-модели трафика.

Описанная в статье аналитическая аппроксимация показывает удовлетворительную согласованность с результатами имитационного моделирования с учетом известных ограничений самих методов имитационного моделирования. При этом замена оценок корреляций между конкретными парами узлов их средними значениями по укрупненной сети в целом сохраняет адекватность статистической модели,

что подтверждается данными имитационного моделирования и анализа эмпирического трафика. Предложенные модели дают промежуточные приближения между двумя вариантами моделирования, учитывая эффекты дискретности и конечного размера выборки.

Телекоммуникационные сети обладают дискретной природой, где информация передается пакетами и часто привязана к временной сетке. На транспортном уровне дискретность наиболее заметна, хотя она может распространяться и на более высокие уровни, за исключением потоковых сервисов. В моделировании учитывается дискретность на транспортном уровне за счет ограничения времени прибытия фиксированным порогом. Однако существует дополнительный источник дискретности из-за односекундного временного разрешения при анализе интенсивности трафика. При этом фрагменты длительностью 1 с считаются стационарными, что адекватно для источников, интенсивность поступлений от которых определяется действиями пользователей, но может быть не достаточной для адекватного учета характеристик трафика, в котором доминируют поступления от IoT-устройств или онлайн-роботов. Уменьшение временного интервала стационарного трафика создает дополнительные эффекты дискретности на менее загруженных узлах из-за целочисленности количества пакетов. На другом конце распределения доминируют эффекты конечного размера выборки. При этом для реальных сетей распределения на практике часто оказываются усеченными ввиду того, что чрезмерные задержки приводят к отказам пользователей

от ожидания и самостоятельному отказу от обслуживания (так называемые уходы).

Заключение. Проанализированы характеристики СМО для агрегированного трафика многопользовательских сетей с переменной интенсивностью и взаимно коррелированной динамикой поступлений. Разработана аналитическая поправка к формуле Кингмана, позволяющая оценивать показатели эффективности СМО на основе коэффициентов вариации трафика в узлах сети и коэффициента корреляции между ними. Подход может быть особенно полезен для проектирования и оптимизации инфокоммуникационных сетей, включая SDN-системы, для выбора оптимальных топологий и алгоритмов маршрутизации на основе аналитических оценок без масштабных компьютерных симуляций.

Практическая валидация показала хорошее соответствие аналитической аппроксимации времени ожидания результатам компьютерного моделирования и эмпирическим данным трафика опорной академической сети. При этом подход демонстрирует приемлемую точность даже при использовании усредненных параметров модели.

Предложенный подход, вероятно, может быть также применим и к иным сложным системам с сетевой архитектурой: информационно-телекоммуникационным, транспортно-логистическим и иным системам, где флуктуации интенсивности определяются взаимодействием неоднородных источников – обусловленных активностью пользователей и различных автономных агентов (IoT-устройств, онлайн-сенсоров или роботов).

Список литературы

1. Erlang A. K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // *Elektroteknikeren*. 1917. Vol. 13. P. 138–155.
2. Pollaczek F. Über Eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie I // *Mathematische Zeitschrift*. 1930. Vol. 32, № 1. P. 64–100.
doi: 10.1007/BF01194620
3. Хинчин А. Я. Математическая теория стационарной очереди // *Мат. сб.* 1932. Т. 39, № 4. С. 73–84.
4. Kingman J. F. C. The single server queue in heavy traffic // *Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 1961. Vol. 57, № 04. P. 902–904.
doi: 10.1017/S0305004100036094
5. Marchal W. G. An approximate formula for waiting time in single server queues // *AIIE Trans.* 1976. Vol. 8, № 4. P. 473–474.

doi: 10.1080/05695557608975111

6. Krämer W., Langenbach-Belz M. Approximate formulae for the delay in the queueing system GI/G/1 // *Proc. 8th Intern. Teletraffic Congr.* 1976. Vol. 235, № 1. P. 1–8.

7. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version) / W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 1994. Vol. 2, iss. 1. P. 1–15.
doi: 10.1109/90.282603

8. Paxson V., Floyd S. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 1995. Vol. 3, iss. 3. P. 226–244.
doi: 10.1109/90.392383

9. The changing nature of network traffic: Scaling phenomena / A. Feldmann, A. C. Gilbert, W. Willinger,

T. G. Kurtz // ACM SIGCOMM Comput. Commun. Rev. 1998. Vol. 28, iss. 2. P. 5–29.
doi: 10.1145/279345.279346

10. Park K., Willinger W. Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation. John Wiley & Sons, 2000. 558 p.
doi: 10.1002/047120644X

11. Universal model for collective access patterns in the Internet traffic dynamics: A superstatistical approach / A. Tamazian, V. Nguyen, O. Markelov, M. Bogachev // EPL. 2016. Vol. 115, № 1. Art. № 10008.
doi: 10.1209/0295-5075/115/10008

12. Markelov O., Duc V. N., Bogachev M. Statistical modeling of the Internet traffic dynamics: To which extent do we need long-term correlations? // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. Vol. 485. P. 48–60.
doi: 10.1016/j.physa.2017.05.023

13. Universal rank-size statistics in network traffic: Modeling collective access patterns by Zipf's law with long-term correlations / V. Nguyen, O. Markelov, A. Serdyuk, A. Vasenev, M. Bogachev // EPL. 2018. Vol. 123, № 5. Art. № 50001.
doi: 10.1209/0295-5075/123/50001

14. Service delays in strongly linked network communities / M. Bogachev, N. Pyko, S. Pyko, A. Vasenev // J. of Physics: Conf. Ser. 2019. Vol. 1352, iss. 1. Art. № 012006.
doi: 10.1088/1742-6596/1352/1/012006

15. Liu Y., Whitt W. Stabilizing performance in networks of queues with time-varying arrival rates // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2014. Vol. 28, № 4. P. 419–449.
doi: 10.1017/S0269964814000084

16. Pender J., Rand R. H., Wesson E. An analysis of queues with delayed information and time-varying arrival rates // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 91, № 4. P. 2411–2427.
doi: 10.1007/s11071-017-4021-0

17. Whitt W. Time-varying queues. Queueing Models Serv. Manag. 2018. Vol. 1, № 2. P. 79–164.

18. Dudin A., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows. Cham: Springer, 2020. 410 p.
doi: 10.1007/978-3-030-32072-0

19. An approximate mean queue length formula for queueing systems with varying service rate / J. Zhang, T. T. Lee, T. Ye, L. Huang // J. of Industrial and Management Optimization. 2021. Vol. 17, iss. 1. P. 185–204.
doi: 10.3934/jimo.2019106

20. Bogachev M., Eichner J., Bunde A. The effects of multifractality on the statistics of return intervals // The European Physical J. Special Topics. 2008. Vol. 161, № 1. P. 181–193.
doi: 10.1140/epjst/e2008-00760-5

21. Bogachev M. I., Eichner J. F., Bunde A. On the occurrence of extreme events in long-term correlated and multifractal data sets // Pure and Applied Geophysics. 2008. Vol. 165. P. 1195–1207.
doi: 10.1007/s00024-008-0353-5

22. Podobnik B., Stanley H. E. Detrended cross-correlation analysis: A new method for analyzing two nonstationary time series // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100, № 8. Art. № 084102.
doi: 10.1103/PhysRevLett.100.084102

23. Detrended partial cross-correlation analysis of two nonstationary time series influenced by common external forces / X.-Y. Qian, Y.-M. Liu, Z.-Q. Jiang, B. Podobnik, W.-X. Zhou, H. E. Stanley // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, № 6. Art. № 062816.
doi: 10.1103/PhysRevE.91.062816

24. Detrended partial-cross-correlation analysis: A new method for analyzing correlations in complex system / N. Yuan, Z. Fu, H. Zhang, L. Piao, E. Xoplaki, J. Luterbacher // Scientific Reports. 2015. Vol. 5, № 1. P. 1–7. Art. № 8143.
doi: 10.1038/srep08143

25. Bogachev M., Bunde A. On the occurrence and predictability of overloads in telecommunication networks // EPL. 2009. Vol. 86, № 6. Art. № 66002.
doi: 10.1209/0295-5075/86/66002

26. Approximate waiting times for queueing systems with variable long-term correlated arrival rates / M. I. Bogachev, A. V. Kuzmenko, O. A. Markelov, N. S. Pyko, S. A. Pyko // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2023. Vol. 614. Art. № 128513.
doi: 10.1016/j.physa.2023.128513

27. Approximate waiting times for queueing systems with variable cross-correlated arrival rates / M. I. Bogachev, N. S. Pyko, N. S. Tymchenko, S. A. Pyko, O. A. Markelov // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2024. Vol. 654. Art. № 130152.
doi: 10.1016/j.physa.2024.130152

28. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain // The Annals of Mathematical Statistics. 1953. Vol. 24, iss. 3. P. 338–354.
doi: 10.1214/aoms/1177728975

29. IoT network model with multimodal node distribution and data-collecting mechanism using mobile clustering nodes / D. Vorobyova, A. Muthanna, A. Paramonov, O. A. Markelov, A. Koucheryavy, G. Ali, E. L. M. Affendi, A. A. Abd El-Latif // Electronics. 2023. Vol. 12, № 6. Art. № 1410.
doi: 10.3390/electronics12061410

30. Little J. D. A proof for the queueing formula: $L = \lambda W$ // Operations Research. 1961. Vol. 9, № 3. P. 383–387.
doi: 10.1287/opre.9.3.383

31. Oliver R. M. An alternate derivation of the Pollaczek-Khintchine formula // Oper. Res. 1964. Vol. 12, № 1. P. 158–159.
doi: 10.1287/opre.12.1.158

32. Cohen J. E. Sum of a random number of correlated random variables that depend on the number of summands // The American Statistician. 2019. Vol. 73, iss. 1. P. 56–60.
doi: 10.1080/00031305.2017.1311283

Информация об авторах

Маркелов Олег Александрович – кандидат технических наук (2014), и. о. заведующего кафедрой радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета

"ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 130 научных работ. Сфера научных интересов – статистический анализ временных рядов; теория телетрафика.

Адрес: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5 Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: oamarkelov@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6099-8867>

Тымченко Никита Сергеевич – магистр по специальности "Радиотехника" (2025, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)), инженер кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор восьми научных публикаций. Сфера научных интересов – системы массового обслуживания; интернет-трафик; математическое моделирование.

Адрес: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5 Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: ntymchenko@etu.ru

<https://orcid.org/0009-0005-1489-8725>

Богачев Михаил Игоревич – доктор технических наук (2018), доцент (2011), профессор кафедры радиотехнических систем, главный научный сотрудник кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 260 научных работ. Сфера научных интересов – статистический анализ данных; математическое моделирование.

Адрес: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5 Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия

E-mail: rogex@yandex.com

<http://orcid.org/0000-0002-0356-5651>

References

1. Erlang A. K. Solution of Some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges. *Elektroteknikeren*. 1917, vol. 13, pp. 138–155.

2. Pollaczek F. Über Eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie I. *Mathematische Zeitschrift*. 1930, vol. 32, no. 1, pp. 64–100.
doi: 10.1007/BF01194620

3. Khintchine A. Ya. *Matematicheskaya teoriya statsionarnoi ocheredi* [Mathematical Theory of Stationary Queues]. *Matem. Sbornik*. 1932, vol. 39, no. 4, pp. 73–84. (In Russ.)

4. Kingman J. F. C. The Single Server Queue in Heavy Traffic. *Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 1961, vol. 57, no. 04, pp. 902–904.
doi: 10.1017/S0305004100036094

5. Marchal W. G. An Approximate Formula for Waiting Time in Single Server Queues. *AIIE Trans.* 1976, vol. 8, no. 4, pp. 473–474.
doi: 10.1080/05695557608975111

6. Krämer W., Langenbach-Belz M. Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System GI/G/1. *Proc. 8th Intern. Teletraffic Congr.* 1976, vol. 235, no. 1, pp. 1–8.

7. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D. V. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version). *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 1994, vol. 2, iss. 1, pp. 1–15.
doi: 10.1109/90.282603

8. Paxson V., Floyd S. Wide Area Traffic: The Failure of Poisson Modelling. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 1995, vol. 3, iss. 3, pp. 226–244.
doi: 10.1109/90.392383

9. Feldmann A., Gilbert A. C., Willinger W., Kurtz T. G. The Changing Nature of Network Traffic: Scaling Phenomena. *ACM SIGCOMM Comput. Commun. Rev.* 1998, vol. 28, iss. 2, pp. 5–29.
doi: 10.1145/279345.279346

10. Park K., Willinger W. Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation. John Wiley & Sons, 2000, 558 p.
doi: 10.1002/047120644X

11. Tamazian A., Nguyen V., Markelov O., Bogachev M. Universal Model For Collective Access Patterns in the Internet Traffic Dynamics: A Superstatistical Approach. *EPL*. 2016, vol. 115, no. 1, art. no. 10008.
doi: 10.1209/0295-5075/115/10008

12. Markelov O., Duc V. N., Bogachev M. Statistical Modeling of the Internet Traffic Dynamics: to Which Extent do We Need Long-Term Correlations? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017, vol. 485, pp. 48–60.
doi: 10.1016/j.physa.2017.05.023

13. Nguyen V., Markelov O., Serdyuk A., Vasenev A., Bogachev M. Universal Rank-Size Statistics in Network Traffic: Modeling Collective Access Patterns by Zipf's Law with Long-Term Correlations. *EPL*. 2018, vol. 123, no. 5, art. no. 50001.
doi: 10.1209/0295-5075/123/50001

14. Bogachev M., Pyko N., Pyko S., Vasenev A. Service Delays in Strongly Linked Network Communities. *J. of Physics: Conf. Ser.* 2019, vol. 1352, iss. 1, art. no. 012006.
doi: 10.1088/1742-6596/1352/1/012006

15. Liu Y., Whitt W. Stabilizing Performance in Networks of Queues with Time-Varying Arrival Rates. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2014, vol. 28, no. 4, pp. 419–449.
doi: 10.1017/S0269964814000084

16. Pender J., Rand R. H., Wesson E. An Analysis of Queues with Delayed Information and Time-Varying

Arrival Rates. *Nonlinear Dyn.* 2018, vol. 91, no. 4, pp. 2411–2427.

doi: 10.1007/s11071-017-4021-0

17. Whitt W. Time-Varying Queues. *Queueing Models Serv. Manag.* 2018, vol. 1, no. 2, pp. 79–164.

18. Dudin A., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows.* Cham, Springer, 2020, 410 p.

doi: 10.1007/978-3-030-32072-0

19. Zhang J., Lee T. T., Ye T., Huang L. An Approximate Mean Queue Length Formula for Queueing Systems with Varying Service Rate. *J. of Industrial and Management Optimization.* 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 185–204.

doi: 10.3934/jimo.2019106

20. Bogachev M., Eichner J., Bunde A. The Effects of Multifractality on the Statistics of Return Intervals. *The European Physical J. Special Topics.* 2008, vol. 161, no. 1, pp. 181–193.

doi: 10.1140/epjst/e2008-00760-5

21. Bogachev M. I., Eichner J. F., Bunde A. On the Occurrence of Extreme Events in Long-Term Correlated and Multifractal Data Sets. *Pure and Applied Geophysics.* 2008, vol. 165, pp. 1195–1207.

doi: 10.1007/s00024-008-0353-5

22. Podobnik B., Stanley H. E. Detrended Cross-Correlation Analysis: a New Method for Analyzing Two Nonstationary Time Series. *Phys. Rev. Lett.* 2008, vol. 100, no. 8, art. no. 084102.

doi: 10.1103/PhysRevLett.100.084102

23. Qian X.-Y., Liu Y.-M., Jiang Z.-Q., Podobnik B., Zhou W.-X., Stanley H. E. Detrended Partial Cross-Correlation Analysis of Two Nonstationary Time Series Influenced by Common External Forces. *Phys. Rev. E.* 2015, vol. 91, no. 6, art. no. 062816.

doi: 10.1103/PhysRevE.91.062816

24. Yuan N., Fu Z., Zhang H., Piao L., Xoplaki E., Luterbacher J. Detrended Partial-Cross-Correlation Analysis: a New Method for Analyzing Correlations in Complex System. *Scientific Reports.* 2015, vol. 5, no. 1, pp. 1–7, art. no. 8143.

doi: 10.1038/srep08143

25. Bogachev M., Bunde A. On the Occurrence and Predictability of Overloads in Telecommunication Networks. *EPL.* 2009, vol. 86, no. 6, art. no. 66002.

doi: 10.1209/0295-5075/86/66002

26. Bogachev M. I., Kuzmenko A. V., Markelov O. A., Pyko N. S., Pyko S. A. Approximate Waiting Times for Queueing Systems with Variable Long-Term Correlated Arrival Rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2023, vol. 614, art. no. 128513.

doi: 10.1016/j.physa.2023.128513

27. Bogachev M. I., Pyko N. S., Tymchenko N. S., Pyko S. A., Markelov O. A. Approximate Waiting Times for Queueing Systems with Variable Cross-Correlated Arrival Rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2024, vol. 654, art. no. 130152.

doi: 10.1016/j.physa.2024.130152

28. Kendall D. G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. *The Annals of Mathematical Statistics.* 1953, vol. 24, iss. 3, pp. 338–354.

doi: 10.1214/aoms/1177728975

29. Vorobyova D., Muthanna A., Paramonov A., Markelov O. A., Koucheryavy A., Ali G., Affendi E. L. M., Abd El-Latif A. A. IoT Network Model with Multimodal Node Distribution and Data-Collecting Mechanism Using Mobile Clustering Nodes. *Electronics.* 2023, vol. 12, no. 6, art. no. 1410.

doi: 10.3390/electronics12061410

30. Little J. D. A Proof for the Queueing Formula: $L = \lambda W$. *Operations Research.* 1961, vol. 9, no. 3, pp. 383–387.

doi: 10.1287/opre.9.3.383

31. Oliver R. M. An Alternate Derivation of the Pollaczek-Khintchine Formula. *Oper. Res.* 1964, vol. 12, no. 1, pp. 158–159.

doi: 10.1287/opre.12.1.158

32. Cohen J. E. Sum of a Random Number of Correlated Random Variables That Depend on the Number of Summands. *The American Statistician.* 2019, vol. 73, iss. 1, pp. 56–60.

doi: 10.1080/00031305.2017.1311283

Information about the authors

Oleg A. Markelov, Cand. Sci. (Eng.) (2014), Associate Professor of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University. The author of 140 scientific publications. Area of expertise: statistical analysis of time series; Internet traffic.

Address: Saint Petersburg Electrotechnical University, 5 F, Professor Popov St., St Petersburg 197022, Russia

E-mail: oamarkelov@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6099-8867>

Nikita S. Tymchenko, Master's degree in Radio Engineering (2025, Saint Petersburg Electrotechnical University), Engineer of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University. Author of 8 scientific publications. Area of expertise: mass service systems; Internet traffic; mathematical modeling.

Address: Saint Petersburg Electrotechnical University, 5 F, Professor Popov St., St Petersburg 197022, Russia

E-mail: ntymchenko@etu.ru

<https://orcid.org/0009-0005-1489-8725>

Mikhail I. Bogachev, Dr Sci. (Eng.) (2018), Associate Professor (2011), Professor of the Department of Radio Engineering Systems, Chief Researcher of the Scientific and Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University. The author of 260 scientific publications. Area of expertise: statistical data analysis; mathematical modeling.

Address: Saint Petersburg Electrotechnical University, 5 F, Professor Popov St., St Petersburg 197022, Russia

E-mail: rogey@yandex.com

<http://orcid.org/0000-0002-0356-5651>